

УДК 551.509.329

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВРЕДНЫХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ СКОРОСТИ ВЕТРА

Абдула Ж., Актаев Е.К., Нурлыбаева А., Аяпбергенова А.Е.

Таразский инновационно-гуманитарный университет, Тараз, e-mail: eaktaev@inbox.ru

Для решения ограничения вредных выбросов необходимы разработки математической модели распространения примеси от источника загрязнения, учитывающая факторы на процесс.

Ключевые слова: метод расщепления, процесс распространения примеси, конвекция, диффузия

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES THE SPREAD OF HARMFUL IMPURITIES IN THE ATMOSPHERE WITH VARIABLE SPEED WIND

Abdula G., Aktayev E.K., Nurlybaeva A., Ayapbergenova A.

Taraz innovation and Humanities University, Taraz, e-mail: eaktaev@inbox.ru

To solve the limitation is necessary to develop a mathematical model of the spread of contaminants from sources of pollution, taking into account the factors on the process.

Keywords: splitting method, pollution spreading, convection, diffusion

Реальный процесс протекает при переменных профилях скорости. Поэтому интересна попытка создания математической модели распространения примеси при переменном профиле скорости. В такой постановке задача значительно усложняется, так как, возникает проблема по какому закону происходит изменение скорости, и в связи с этим усложняется форма самого устойчивого вычислительного алгоритма решения задачи, появляются также трудности в непосредственной реализации алгоритма на ЭВМ. В данной работе исследуется процесс распространения примеси точечного источника. На границах области и плоскости ХУ значения примеси принимаются равными нулю. Математическая модель задачи включает в себе уравнения переноса с источником членом. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u \phi}{\partial x} + \frac{\partial v \phi}{\partial y} + \frac{\partial w \phi}{\partial z} + \sigma \phi - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = f(x, y, z, t) \quad (1)$$

При начальных и граничных условиях:

$$\phi = \phi_0(x, y, z) \text{ при } t = 0;$$

$$\phi = 0 \text{ в } \Omega = \begin{cases} x = 0, & y = 0, \\ x = a, & y = b, \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = a \phi \text{ при } z = 0 \text{ и } \phi = 0 \text{ при } Z = H \quad (3)$$

где ϕ – интенсивность примеси;

u, v, w – составляющие вектора скорости вдоль оси ОХ, ОУ, ОZ; $\mu > 0, \nu > 0$ – горизонтальный и вертикальный коэффициенты вязкости;
 $\sigma = \text{const} > 0$ – коэффициент взаимодействия субстанции;
 $a > 0$ – коэффициент взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью;
 $f = f(x, y, z, t)$ – функция, характеризующая источник примеси, вида:

$$f = Q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0),$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты источника;

t_0 – время включения источника;

Q – его мощность.

Решение ищется в области $\Omega \times \Omega$, где

$$\Omega = \{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, H]\},$$

$$\Omega_1 = \{0 \leq t \leq T\}.$$

Переменное поле скорости накладывает определенные особенности в решении поставленной задачи. Возникает проблема при аппроксимации исходной дифференциальной задачи (1)-(3) соответствующими разностными задачами. Рассмотрим аппроксимации соответствующих операторов в (1) в случае переменности профиля скорости. Вначале рассмотрим уравнение переноса содержащее только конвективные члены, т.е. задача двумерная. Запишем исходное уравнение в форме [1]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = f \text{ в } \Omega \times \Omega, \quad (4)$$

где

$$\Omega = \{x \in [0, a], y \in [0, b]\}, \quad \Omega_1 = \{0 \leq t \leq T\}.$$

Компоненты скорости в общем случае являются функциями от x, y и z . В этом случае должно выполняться уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

в каждый момент времени t .

Запишем (4) в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi = 0 \quad \text{где} \quad A\phi = u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Введем скалярное произведение обычным образом, т.е.

$$(A\phi, \phi) = \int_0^a dx \int_0^b \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \phi dy \quad (5)$$

Тогда с учетом уравнения неразрывности (5) можно преобразовать:

$$(A\phi, \phi) = \int_0^a dx \int_0^b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u \phi^2}{\partial x} + \frac{\partial v \phi^2}{\partial y} \right) dy \quad (6)$$

Предположим, что $A = A_1 + A_2$. Тогда для каждого A_a ($a = 1, 2$) имеем:

$$\begin{aligned} (A_1 \phi, \phi) &= \frac{1}{2} \int_0^a dx \int_0^b \phi^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy; \\ (A_2 \phi, \phi) &= \frac{1}{2} \int_0^a dx \int_0^b \phi^2 \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим теперь реальную трехмерную задачу, описываемую уравнением типа (1), но записанную в операторной форме:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{a=1}^3 A_a \phi = f \quad \text{в } \Omega x \Omega \quad (8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 \phi &= \frac{\partial u \phi}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\phi}{2} \frac{\partial u}{\partial x}; \\ A_2 \phi &= \frac{\partial v \phi}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\phi}{2} \frac{\partial v}{\partial y}; \\ A_3 \phi &= \frac{\partial w \phi}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\phi}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \phi. \end{aligned}$$

Решение уравнения (8) ищется в области

$$\Omega = \{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, H]\},$$

$$\Omega_1 = \{0 \leq t \leq T\}$$

при следующих начальном и граничных условиях:

$$\phi = \phi_0(x, y, z) \quad \text{при } t = 0;$$

$$\phi = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x = 0, & x = a, \\ y = 0, & y = b \end{cases}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = a\phi \quad \text{при } z = 0 \quad \phi = 0 \quad \text{при } z = H. \quad (9)$$

Для численного решения задачи будем использовать разностные схемы, основанные на методах расщепления [2]. Известны различные подходы и способы расщепления [2], например, по физическим процессам, по пространственным переменным. Нами использован метод расщепления, первый этап которого включает в себе горизонтальный перенос и диффузию примеси, а второй этап – конвекцию и диффузию в направлении оси OZ. Однако, необходимо убедиться в применимости метода расщепления, т.е. следует проверить знакоопределенности A_a исходной дифференциальной задачи, для чего проверяем выполняемость соотношений: $(A_a \phi, \phi) > 0$, $a = 1, 2, 3$. При рассмотрении случая $u = u(z)$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$, согласно граничным условиям (9), а также из условий $u = (z)$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ получим положительную определенность оператора A_1 . Аналогично можно показать положительную определенность оператора A_2 . Скалярное произведение $(A_3 \phi, \phi)$, положительно – определенность имеет место при условии $\nu a - \frac{w}{2} > 0$.

Нами решена задача распространения монодисперсной пассивной примеси от мгновенного точечного источника в атмосфере в предположении частичного поглощения примеси поверхностью. Математическая модель описана уравнениями (8)-(9). Продольная составляющая скорости u – функция координаты z . Согласно изложенного выше алгоритма, основанного на методе расщепления, составлена программа численного счета. Получены распределения примеси для различных режимных параметров. Изменились виды начального профиля продольной скорости $u = f(z)$, значения числа Рейнольдса. Проведены расчеты при наличии в области двух мгновенных источников. Решение задачи распределения пассивной монодисперсной примеси проведено численными методами. Полученные результаты согласуются с физическими закономерностями рассматриваемого течения.

Список литературы

1. Айдовос А. Теоретические основы прогнозирования природных процессов и экологической обстановки окружающей среды. – Алматы, 2000 – С. 289.
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982.