

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СОСРЕДОТОЧЕННОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Мусаев В.К.

Московский государственный машиностроительный университет (МГМУ), Москва,
e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация о моделировании динамических напряжений в упругой полуплоскости при горизонтальном сосредоточенном нестационарном воздействии воздушной ударной волны. Для реализации поставленной задачи применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных динамических задач теории упругости. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Задача с начальными условиями с помощью конечно-элементного варианта метода Галеркина приведена к явной двухслойной схеме. Решена задача о горизонтальном сосредоточенном воздействии воздушной ударной волны на упругую полуплоскость. Исследуемая расчетная область имеет 4008004 узловых точек. Решается система уравнений из 16032016 неизвестных. Приводится нормальное напряжение в девяти точках характерной области упругой полуплоскости.

Ключевые слова: вычислительный эксперимент, математическое моделирование, численный метод, алгоритм, комплекс программ, численный метод Мусаева В.К., упругие волны, нестационарные волновые уравнения, динамика сплошных сред, конечноэлементный метод Галеркина, сосредоточенное воздействие, упругая полуплоскость, плоскость, воздушная деформируемая среда, твердая деформируемая среда, волны напряжений

SIMULATION OF DYNAMIC STRESSES IN THE ELASTIC HALF-PLANE UNDER CONCENTRATED HORIZONTAL UNSTEADY EFFECTS OF SHOCK WAVE

Musayev V.K.

Moscow state University of mechanical engineering (MSMU), Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides information on the modeling of dynamic stresses in the elastic half-plane under concentrated horizontal unsteady effects of shock wave. To accomplish the task applied numerical modeling. On the basis of the finite element method in displacements the developed method, algorithm and program complex for solving linear dynamic problems of the elasticity theory. The basic relations of the finite element method is obtained by using principle of possible displacements. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements given to the system of linear ordinary differential equations with initial conditions. The problem with the initial conditions using a finite element Galerkin method provides options for explicit two-layer scheme. The problem of horizontal concentrated impact of air shock wave on an elastic half-plane. The studied computational domain has 4008004 nodal points. Solves the system of equations from 16032016 unknown. Is normal stress in nine points characterized the field of elastic half-plane.

Keywords: a computational experiment, mathematical modeling, numerical method, algorithm, software complex, numerical method Musayev V.K., elastic waves, transient wave equation, dynamics of continuum, finite element Galerkin method, a concentrated impact, the elastic half-plane, plane, air deformable medium, a deformable solid medium, waves of stress

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\Phi} + \bar{K}\dot{\Phi} = \bar{R}, \quad \dot{\Phi}|_{t=0} = \dot{\Phi}_0, \quad \ddot{\Phi}|_{t=0} = \ddot{\Phi}_0, \quad (1)$$

где \bar{H} – диагональная матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; Φ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\Phi}$ – вектор

узловых упругих скоростей перемещений;

$\ddot{\Phi}$ – вектор узловых упругих ускорений;

\bar{R} – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнения (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\ddot{\Phi}_{i+1} = \ddot{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\dot{\Phi}_i + \bar{R}_i),$$

$$\dot{\Phi}_{i+1} = \dot{\Phi}_i + \Delta t \ddot{\Phi}_{i+1}. \quad (2)$$

Шаг по временной переменной координате Δt выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплексы программ написаны на алгоритмическом языке Фортран-90.

В работах [1–10] приведена некоторая информация о моделировании нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью рассматриваемого численного метода.

Рассматриваемая проблема включает большой перечень фундаментальных и прикладных задач в области безопасности сложных технических объектов, которые необходимо решить. Одной из главных задач является определение нестационарных волновых напряжений в упругой полуплоскости при горизонтальном сосредоточенном воздействии. Применение моделей и методов волновой теории упругости позволит реализовать поставленную проблему.

Некоторая информация о физической достоверности и математической точности применяемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [3–5, 7–10].

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода

в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 0,98 \times 10^9 \text{ кг/м}^3$.

Рассмотрим задачу о горизонтальном сосредоточенном воздействии воздушной ударной волны (рис. 2) на упругую полуплоскость (рис. 1).

В точке D приложено нормальное воздействие σ_x , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется от 0 до P, а при $11 \leq n \leq 30$ равно P и при $31 \leq n \leq 40$ изменяется от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,098 \text{ МПа}$ (1 кгс/см^2)). Принято следующее допущение: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$.

Граничные условия для контура ABCFGE при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура ABCFGE не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 500$. На границе CDE приняты условия непрерывности перемещений.

Для воздушной деформируемой среды ABCDE приняты следующие исходные данные: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 0,147 \times 10^{-4} \text{ с}$; $C_p = 340 \text{ м/с}$; $\rho = 1,22 \text{ кг/м}^3$ ($1,245 \times 10^{-9} \text{ кгс с}^2/\text{см}^4$). Принято следующее допущение: $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 0,98 \times 10^9 \text{ кг/м}^3$.

Для твердой деформируемой среды EDCFG приняты следующие исходные данные: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 9,263 \times 10^{-7} \text{ с}$; $E = 6,958 \times 10^4 \text{ МПа}$ ($7,1 \times 10^5 \text{ кгс/см}^2$); $\nu = 0,34$; $\rho = 2,7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ ($2,755 \times 10^{-6} \text{ кгс с}^2/\text{см}^4$); $C_p = 5398 \text{ м/с}$; $C_s = 3078 \text{ м/с}$. Приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 0,98 \times 10^9 \text{ кг/м}^3$.

В расчетах принимается минимальный шаг по времени, то есть $\Delta t = 9,263 \times 10^{-7}$.

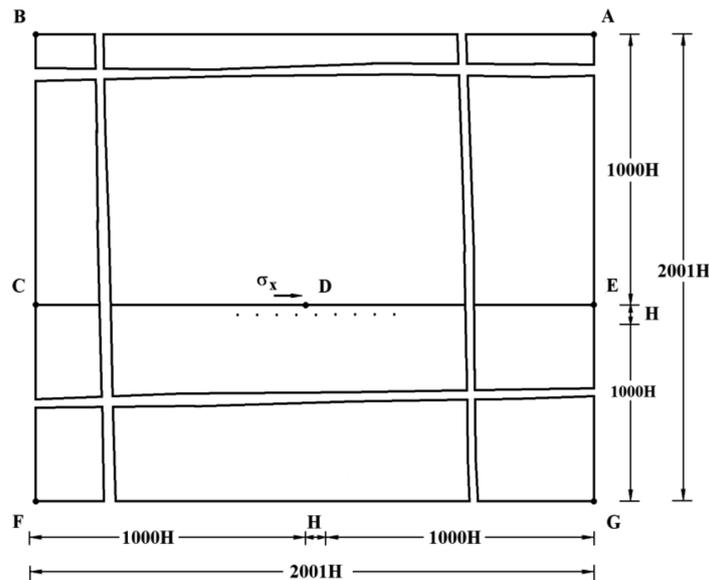


Рис. 1. Постановка задачи о горизонтальном сосредоточенном воздействии воздушной ударной волны на упругую полуплоскость

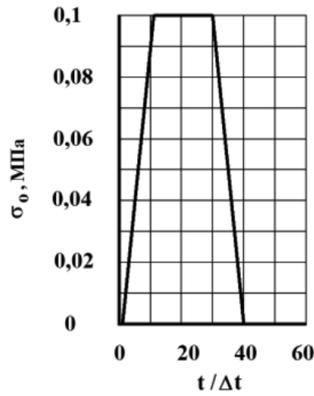


Рис. 2. Ударное воздействие

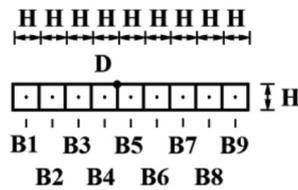


Рис. 3. Точки В1–В9, в которых получены упругие напряжения во времени

Исследуемая расчетная область имеет 4008004 узловых точек. Решается система уравнений из 16032016 неизвестных.

На рис. 4-12 представлено изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ ($\bar{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|$) во времени t в точках В1–В9, находящиеся в упругой полуплоскости (рис. 3).

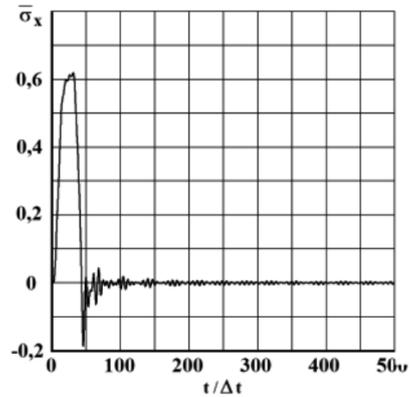


Рис. 6. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке В3

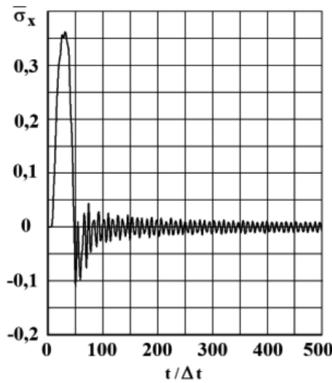


Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке В1

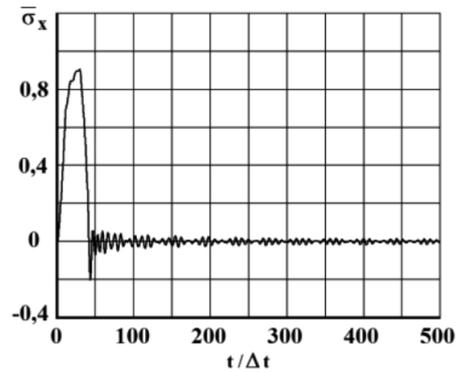


Рис. 7. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке В7

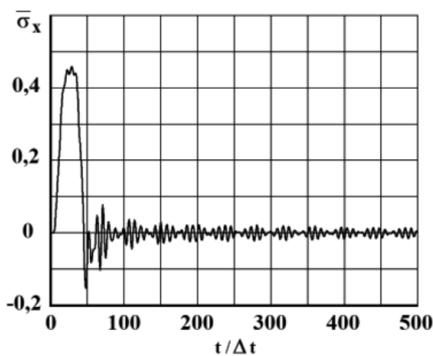


Рис. 5. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке В2

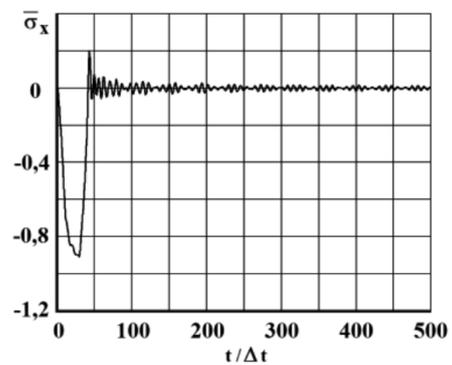


Рис. 8. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке В5

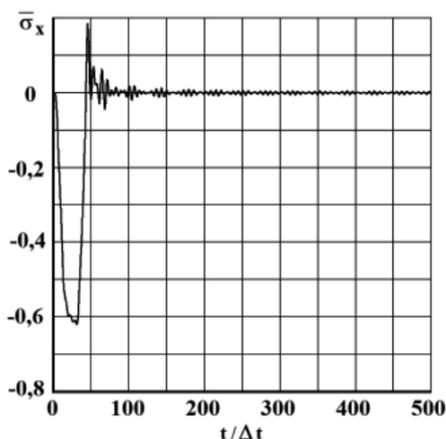


Рис. 9. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке B6

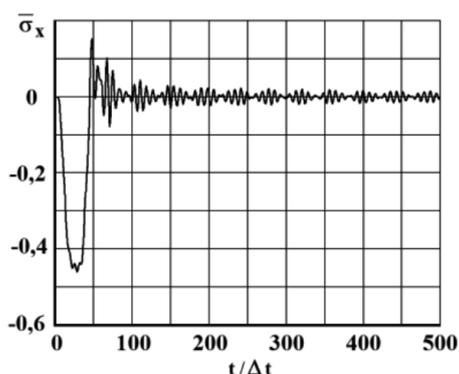


Рис. 10. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке B7

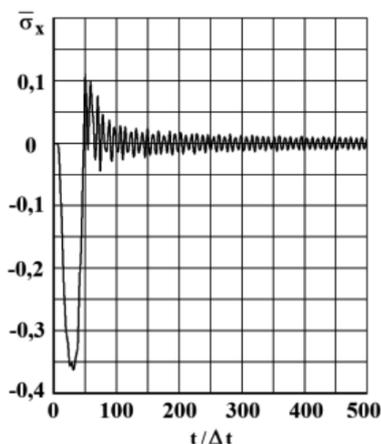


Рис. 11. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке B8

Выводы

1. Для прогноза безопасности уникальных сооружений, находящихся в воздушной

и твердой деформируемой среде, при волновых воздействиях применяется численное моделирование.

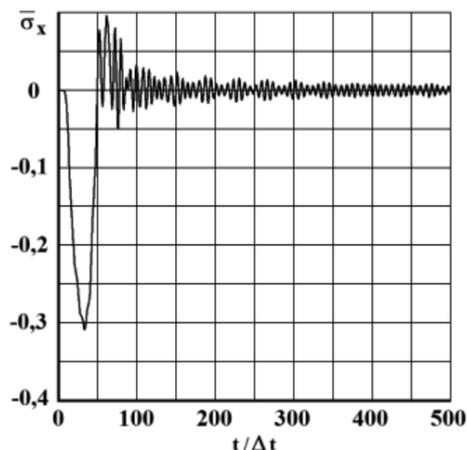


Рис. 12. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени $t/\Delta t$ в точке B9

2. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при волновых воздействиях на сооружения.

3. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

4. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений.

5. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

6. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента.

7. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется кусочно-линейная аппроксимация для уменьшения влияния разрывов на точность результатов численного решения, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях.

8. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных, для решения задач при волновых воздействиях, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

9. Решена задача о горизонтальном сосредоточенном воздействии воздушной ударной волны на упругую полуплоскость. Исследуемая расчетная область имеет 4008004 узловых точек. Решается система уравнений из 16032016 неизвестных. Растягивающее упругое нормальное напряжение $\bar{\sigma}_x$ в окрестности горизонтального сосредоточенного воздействия имеет следующее максимальное значение $\bar{\sigma}_x = 0,908$. Сжимающее упругое нормальное напряжение $\bar{\sigma}_x$ в окрестности горизонтального сосредоточенного воздействия имеет следующее максимальное значение $\bar{\sigma}_x = -0,908$.

10. Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи о горизонтальном сосредоточенном воздействии воздушной ударной волны на упругую полуплоскость с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное решение некоторых задач безопасности жизнедеятельности с помощью метода конечных элементов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 17–23.
2. Мусаев В.К. Определение качества сооружений в детерминированной постановке с помощью математического мониторинга // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 42–47.
3. Мусаев В.К. О моделировании сейсмических волновых процессов в подкрепленном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 6–17.
4. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 43–51.
5. Мусаев В.К. О моделировании интерференции плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 3. – С. 51–59.
6. Мусаев В.К. О моделировании безопасности технических объектов от взрывных воздействий // Стратегическая стабильность. – 2013. – № 1. – С. 69–72.
7. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
8. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.
9. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.
10. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 222–226.