

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ БЕЗ ПОЛОСТИ И С ПОЛОСТЬЮ С ПОМОЩЬЮ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ СЕЙСМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Мусаев В.К.

Московский государственный машиностроительный университет (МГМУ), Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится некоторая информация моделирования безопасности некоторых задач при нестационарных волновых сейсмических воздействиях с помощью метода конечных элементов. Применяются технические средства в виде вертикальных полостей для увеличения безопасности объекта. Для решения поставленных задач применяются волновые уравнения механики деформируемого твердого тела. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных динамических задач теории упругости. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Задача с начальными условиями с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина приведена к явной двухслойной схеме. Рассмотрена постановка некоторых задачи с полостью и без полости в полуплоскости при воздействии в виде функции Хевисайда. Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14520 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

Ключевые слова: моделирование, математическое моделирование, численный метод, алгоритм, комплекс программ, метод Мусаева В.К., нестационарные упругие волны, динамика сплошных сред, волновая теория сейсмической безопасности, конечноэлементный метод Галеркина, распространение волн, вертикальные прямоугольные полости, исследуемая расчетная область, функция Хевисайда

SIMULATION OF TRANSIENT ELASTIC DYNAMIC STRESSES IN THE HALF PLANE WITHOUT A CAVITY AND WITH THE CAVITY USING THE WAVE THEORY OF SEISMIC SAFETY

Musayev V.K.

Moscow state University of mechanical engineering (MSMU), Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides a bit of information security modeling of some problems in non-stationary wave seismic load using finite element method. Apply technical tools in the form of vertical cavities to increase the security of the facility. To solve problems apply the wave equation mechanics of deformable solids. On the basis of the finite element method in displacements the developed method, algorithm and program complex for solving linear dynamic problems of the elasticity theory. The basic relations of the finite element method is obtained by using principle of possible displacements. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements given to the system of linear ordinary differential equations with initial conditions. The problem with the initial conditions using a finite element Galerkin method provides options for explicit two-layer scheme. The statement of some tasks with the cavity and without cavity in a half-plane when exposed in the form of Heaviside functions. The studied computational domain has 14762 nodal points and finite elements 14520. Solves the system of equations of unknown 59048.

Keywords: modeling, mathematical modeling, numerical method, algorithm, software complex, the method Musayev V.K., unsteady elastic waves, dynamics of continuous media, wave theory for seismic safety, finite element method, Galerkin, wave propagation, vertical rectangular cavity of the studied computational domain, the function of Heaviside

Постановка задачи при нестационарных волновых воздействиях

Обеспечение безопасности уникальных объектов при нестационарных волновых воздействиях является приоритетной задачей фундаментальной и прикладной науки.

В работах [1–10] приведена информация о постановке и численной реализации нестационарных волновых задач механики деформируемого твердого тела.

Для решения задачи о моделировании упругих волн в деформируемых областях

сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma, \\ \sigma_x &= \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \\ \sigma_y &= \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \\ (x, y) &\in (\Gamma \cup S), \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; S ($S_1 \cup S_2$) – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

В работах [2–4, 6, 9–10] приведена информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых объектах при нестационарных сейсмических воздействиях с помощью разработанного численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\Phi} + \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0, \quad \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где \bar{H} – диагональная матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\bar{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнение (2) конечно-элементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечно-элементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{i+1} &= \bar{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \bar{\Phi}_i + \bar{R}_i), \\ \bar{\Phi}_{i+1} &= \bar{\Phi}_i + \Delta t \dot{\bar{\Phi}}_{i+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Шаг по временной переменной координате Δt выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплексы программ написаны на алгоритмическом языке Фортран-90.

В работах [5, 7–8] приведена информация о физической достоверности и математической точности в области моделирования нестационарных волн напряжений в областях различной формы с помощью рассматриваемого метода.

Решение задач о сейсмических волнах в полуплоскости с полостью и без полости

В работе рассматриваются технические средства в виде вертикальных полостей для управления сейсмических напряженным состоянием исследуемых объектов. Приводится некоторая информация в области постановки задач с полостью и без полости.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: 1 кгс/см² \approx 0,1 МПа; 1 кгс с²/см⁴ \approx 10⁹ кг/м³.

1. Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической волны (рис. 2) параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости без полости (рис. 1).

От точки В параллельно свободной поверхности ABC приложено нормальное напряжение σ_x , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $n \geq 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,1$ МПа (1 кгс/см²)). Граничные условия для контура CDEA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура CDEA не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур ABC свободен от нагрузок, кроме точки В.

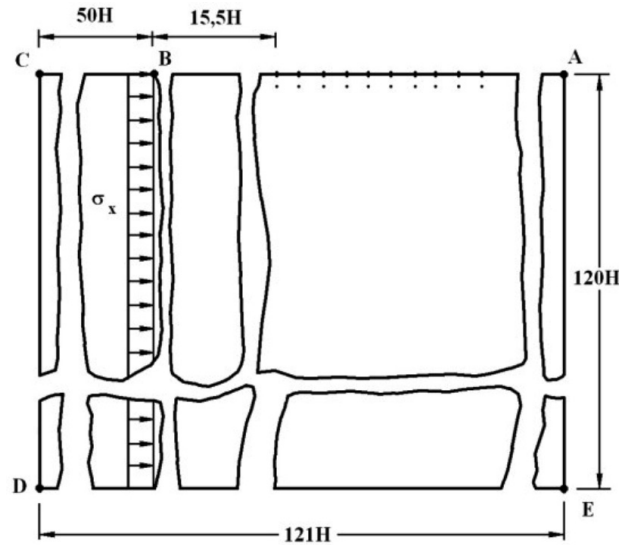


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии плоской продольной сейсмической волны параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости без полости

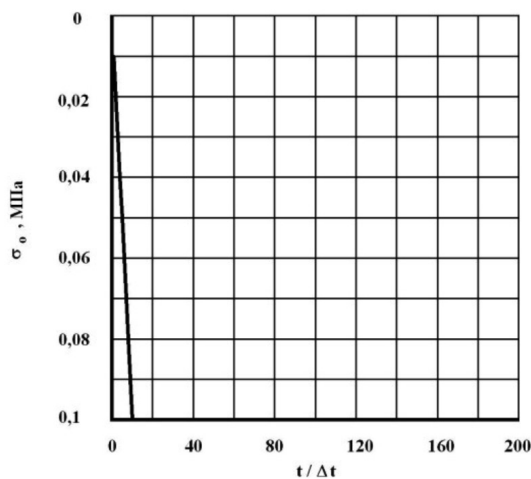


Рис. 2. Воздействие типа функции Хевисайда

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14520 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. В характерных областях исследуемой задачи получены контурные напряжения и компоненты тензора напряжений.

2. Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической волны (рис. 2) параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем) (рис. 3). От точки F параллельно

свободной поверхности ABEFG приложено нормальное напряжение σ_x , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $n \geq 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,1$ МПа (1 кгс/см²)).

Граничные условия для контура GHIA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура GHIA не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур ABCDEFG свободен от нагрузок, кроме точки F. Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \times 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14516 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. В характерных областях исследуемой задачи получены контурные напряжения и компоненты тензора напряжений.

3. Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической волны (рис. 2) параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми) (рис. 4). От точки F параллельно свободной поверхности ABEFG приложено нормальное напряжение σ_x , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $n \geq 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,1$ МПа (1 кгс/см²)). Граничные условия для контура GHIA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура GHIA не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур ABCDEFG свободен от нагрузок, кроме точки F.

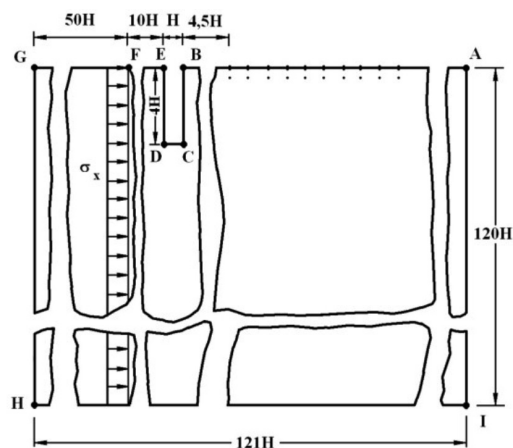


Рис. 3. Постановка задачи о воздействии плоской продольной сейсмической волны на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к четырем)

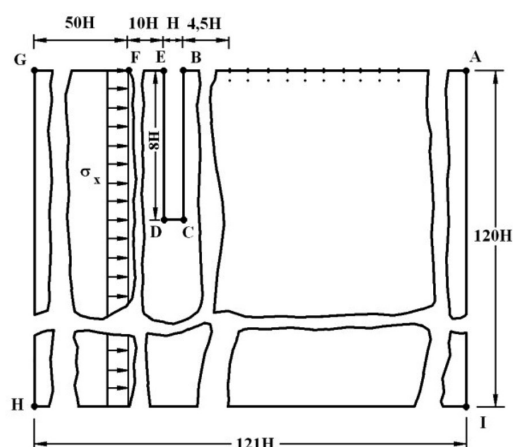


Рис. 4. Постановка задачи о воздействии плоской продольной сейсмической волны на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14512 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

4. Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической волны (рис. 2) параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати) (рис. 5). От точки F парал-

лельно свободной поверхности АВЕFG приложено нормальное напряжение σ_x , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $n \geq 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,1$ МПа (1 кгс/см²)). Граничные условия для контура GHIA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура GHIA не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур ABCDEFG свободен от нагрузок, кроме точки F. Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14508 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

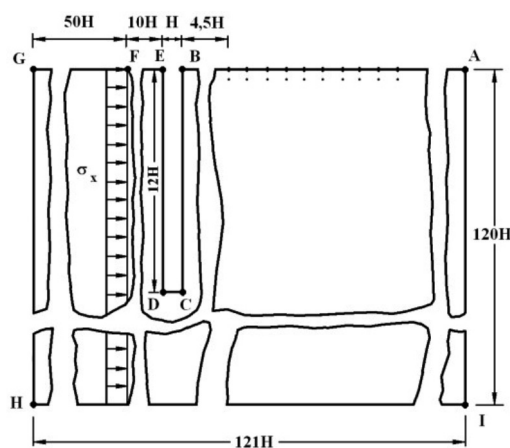


Рис. 5. Постановка задачи о воздействии плоской продольной сейсмической волны на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к двенадцати)

Выводы

Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи, о применении полостей для увеличения безопасности различных сооружений при нестационарных волновых сейсмических воздействиях, с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Определение качества сооружений в детерминированной постановке с помощью математического мониторинга // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 42–47.
2. Мусаев В.К. Об управлении упругим волновым напряженным состоянием сооружений с помощью полостей в виде прямоугольников при сейсмических воздействиях //

Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 2. – С. 6–17.

3. Мусаев В.К. Численное моделирование упругих сейсмических волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 4. – С. 6–22.

4. Мусаев В.К. Математическое моделирование сейсмической безопасности сооружений неглубокого заложения с помощью вертикальных полостей // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 6–14.

5. Мусаев В.К. Об устойчивости одномерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной линейной сетке // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 57–60.

6. Мусаев В.К. О численном моделировании безопасности системы «сооружение-грунт-воздух» при сейсмиче-

ских воздействиях // Двойные технологии. – 2013. – № 3. – С. 47–49.

7. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

8. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

9. Мусаев В.К. Численное моделирование нестационарных упругих волн напряжений в некоторых задачах методического характера // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 227–230.

10. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных процессов в геообъектах с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 12. – С. 347–352.