

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ФУНДАМЕНТЕ МАШИН С ОСНОВАНИЕМ (ПОЛУПЛОСКОСТЬ) ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УПРУГОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Мусаев В.К.

*Московский государственный машиностроительный университет (МГМУ), Москва,  
e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Приводится некоторая информация численного моделирования динамических напряжений в фундаменте машин с основанием в виде полуплоскости при воздействии упругой нестационарной ударной волны. Для решения поставленных задач применяются волновые уравнения механики деформируемого твердого тела. Поставленная задача реализуется с помощью численного метода конечных элементов. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных динамических задач теории упругости. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Задача с начальными условиями с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина приведена к явной двухслойной схеме. Решена задача о воздействии упругой ударной волны на фундамент машин. Исследуемая расчетная область имеет 14320 узловых точек. Решается система уравнений из 57280 неизвестных. Получены напряжения в точках на поверхности упругой полуплоскости около фундамента машин.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численный метод, алгоритм, комплекс программ, комплекс программ Мусаева В.К., упругие волны, нестационарные волновые уравнения, динамика сплошных сред, метод Галеркина, распространение волн, ударное воздействие, фундамент машин, конечные элементы первого порядка, явная конечноэлементная схема, полуплоскость, исследуемая расчетная область

## NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC STRESS IN FOUNDATION MACHINES WITH THE GROUND (HALF-PLANE) UNDER THE INFLUENCE OF NON-STATIONARY ELASTIC SHOCK WAVE

Musayev V.K.

*Moscow state University of mechanical engineering (MSMU), Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Some information is numerical simulation of dynamic stress in Foundation of machines with a base in the form of a half-plane under the influence of elastic non-stationary shock wave. To solve problems apply the wave equation mechanics of deformable solids. The task is implemented using numerical method of finite elements. On the basis of the finite element method in displacements the developed method, algorithm and program complex for solving linear dynamic problems of the elasticity theory. The basic relations of the finite element method is obtained by using principle of possible displacements. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements given to the system of linear ordinary differential equations with initial conditions. The problem with the initial conditions using a finite element Galerkin method provides options for explicit two-layer scheme. The problem of elastic impact of a shock wave on the Foundation of machinery. The studied computational domain has 14320 nodal points. Solves the system of equations of unknown 57280. The resulting voltage at points on the surface of an elastic half-plane at the base of the machines.

**Keywords:** mathematical modeling, numerical method, algorithm, complex programs, complex programs Musayev V.K., elastic waves, transient wave equation, dynamics of continuum, method of Galerkin, wave propagation, shock, Foundation machines, finite elements of first order, explicit finite element scheme, the half-plane, the studied computational domain

При динамическом и импульсном воздействии в сооружении распространяются волны напряжений. Волны напряжений образуют области возмущений. Материал находится в напряженно-деформированном состоянии. При волновом воздействии существуют локализованные напряжения и деформации, способствующие возникновению разрушения в одной части тела независимо оттого, что происходит в другой его части.

Напряженное состояние импульсного (волнового) нагруженного тела может из-

меняться так быстро, что возникающие деформации и разрушения еще не успевают распространиться, как распределение напряжений изменится, так как скорости распространения волн напряжений достигают 6000 м/с, а нарушение прочности (трещины) распространяются со скоростью не более 1500 м/с.

Многие разрушения, которые вызваны волновыми нагрузками, можно объяснить, рассматривая влияние, которое оказывает геометрия форма тела на волны напряжений. Отражение от свободных поверхностей

волн сжатия приводит к появлению растягивающих волн, которые, распространяясь по телу, интерферируют друг с другом.

В результате взаимодействия волн напряжений наблюдаются некоторые явления: разрушение, имеющее место при интерференции прямой и отраженной волн, называемой отколом; угловые разрушения, возникающие в угловых точках при взаимодействии двух или нескольких волн, которые отражаются от свободных поверхностей.

При отражении прямой волны сжатия от свободной поверхности тела зарождается отраженная волна растяжения. Интерференция прямой и отраженной волн может вызвать растягивающее напряжение. Это явление обычно развивается на небольшом расстоянии от свободной поверхности. Величина растягивающего напряжения достаточна для разрушения материала. При разрушении происходит откол.

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях.

Практическая реализация математического моделирования волн напряжений в сложных деформируемых телах с помощью разработанного численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [1–10].

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела  $\Gamma$ , записываем при-

ближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\bar{\Phi}} + \bar{K}\bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0, \quad \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad (1)$$

где  $\bar{H}$  – диагональная матрица инерции;  $\bar{K}$  – матрица жесткости;  $\bar{\Phi}$  – вектор узловых упругих перемещений;  $\dot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих скоростей перемещений;  $\ddot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих ускорений;  $\bar{R}$  – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнения (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\bar{\Phi}_{i+1} = \bar{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\bar{\Phi}_i + \bar{R}_i),$$

$$\dot{\bar{\Phi}}_{i+1} = \dot{\bar{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\bar{\Phi}}_{i+1}. \quad (2)$$

Шаг по временной переменной координате  $\Delta t$  выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где  $\Delta l$  – длина стороны конечного элемента.

В работах [1–4, 6–9] приведена информация о верификации численного моделирования нестационарных волн напряжений в областях различной формы с помощью разработанного метода, алгоритма и комплекса программ.

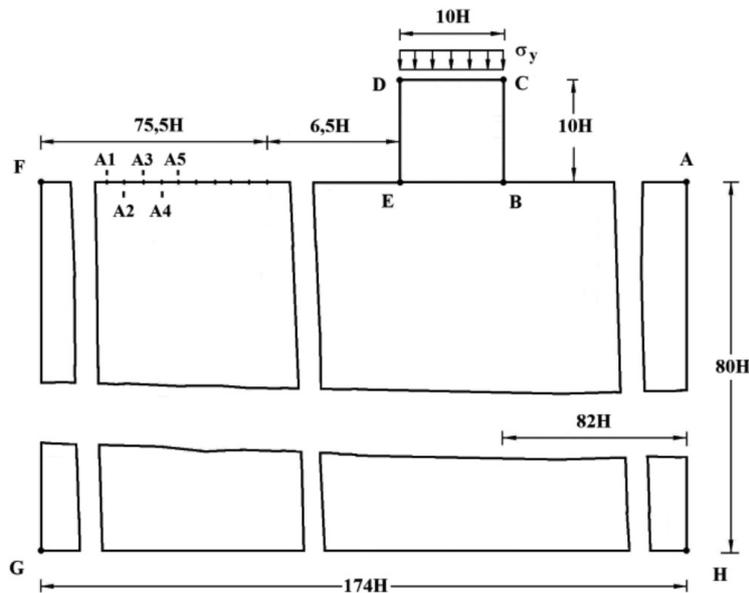


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии упругой ударной волны на фундамент машин

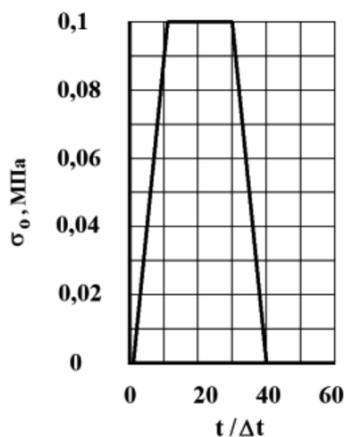


Рис. 2. Ударное воздействие в виде трапеции для задачи без полости

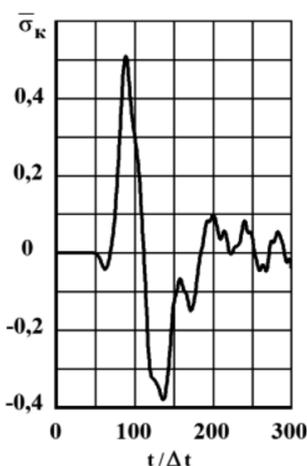


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  во времени  $t/\Delta t$  в точке A1

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при ударных воздействиях на сооружения.

Рассмотрим задачу о воздействии упругой ударной волны (рис. 2) на фундамент машин без полости (рис. 1).

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения:  $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$ ;  $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$ .

На контуре CD приложено нормальное воздействие  $\sigma_y$  (рис. 1), которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до P, при  $11 \leq n \leq 30$  равно P и при  $31 \leq n \leq 40$  от P до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1 \text{ МПа}$  ( $-1 \text{ кгс/см}^2$ )). Граничные условия для контура FGHA при

$t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контура FGHA не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 200$ . Контур DEF и CBA свободны от нагрузок, кроме точек D и C, где приложено воздействие.

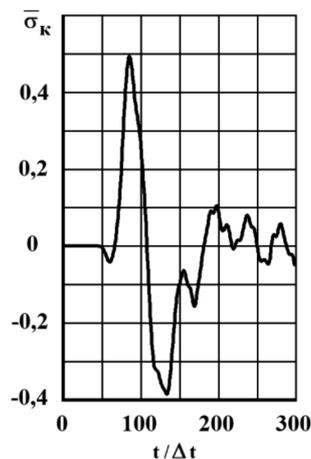


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  во времени  $t/\Delta t$  в точке A2

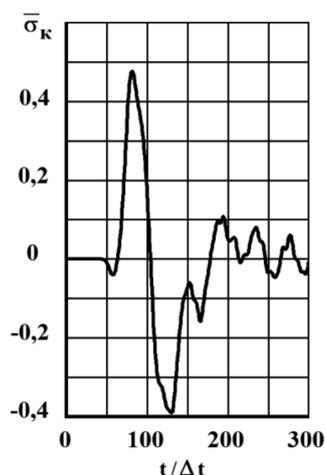


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  во времени  $t/\Delta t$  в точке A3

Расчеты проведены при следующих исходных данных:  $H = \Delta x = \Delta y$ ;  $\Delta t = 1,393 \times 10^{-6} \text{ с}$ ;  $E = 3,15 \times 10^4 \text{ МПа}$  ( $3,15 \times 10^5 \text{ кгс/см}^2$ );  $\nu = 0,2$ ;  $\rho = 0,255 \times 10^4 \text{ кг/м}^3$  ( $0,255 \times 10^5 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4$ );  $C_p = 3587 \text{ м/с}$ ;  $C_s = 2269 \text{ м/с}$ .

Исследуемая расчетная область имеет 14320 узловых точек. Решается система уравнений из 57280 неизвестных.

На рис. 3–7 показано изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  ( $\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точках A1–A5 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости (расстояние между точ-

ками: A1 и A2 равно H; A2 и A3 равно H; A3 и A4 равно H; A4 и A5 равно H).

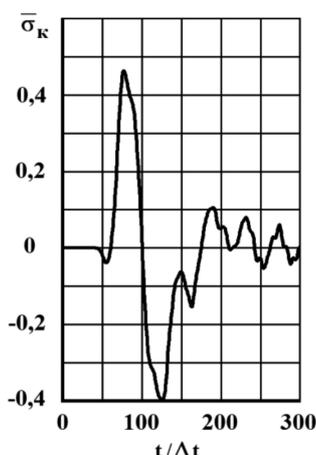


Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  во времени  $t/\Delta t$  в точке A4

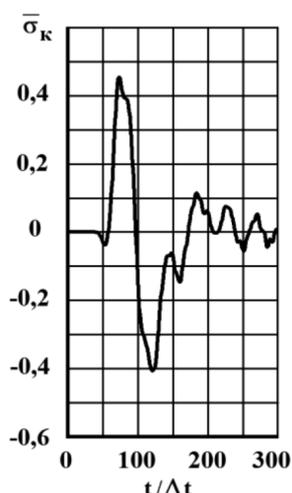


Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  во времени  $t/\Delta t$  в точке A5

### Выводы

1. Для прогноза безопасности фундамента машин при воздействии упругой ударной волны применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при ударных воздействиях на сооружения.

2. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

3. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента.

4. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется кусочно-линейная аппроксимация для уменьшения влияния разрывов на точность результатов численного решения, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях.

5. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных, для решения задач при ударных воздействиях, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

6. Решена задача о воздействии упругой ударной волны на фундамент машин. Исследуемая расчетная область имеет 14320 узловых точек. Решается система уравнений из 57280 неизвестных. Получены напряжения в точках на поверхности упругой полуплоскости около фундамента машин. Растягивающее упругое контурное напряжение  $\bar{\sigma}_k$  имеет следующее максимальное значение  $\bar{\sigma}_k = 0,51$ . Сжимающее упругое контурное напряжение  $\bar{\sigma}_k$  имеет следующее максимальное значение  $\bar{\sigma}_k = -0,445$ . Растягивающее упругое нормальное напряжение  $\bar{\sigma}_x$  имеет следующее максимальное значение  $\bar{\sigma}_x = 0,506$ . Сжимающее упругое нормальное напряжение  $\bar{\sigma}_x$  имеет следующее максимальное значение  $\bar{\sigma}_x = -0,347$ .

7. Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи о безопасности фундамента с основанием при нестационарных ударных воздействиях.

### Список литературы

1. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 43–51.

2. Мусаев В.К. О моделировании отражения упругих волн напряжений от свободной поверхности деформируемой области // Двойные технологии. – 2012. – № 4. – С. 61–64.
3. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.
4. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
5. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемой среде на поверхности полуплоскости при взрывном воздействии в объекте хранения опасных веществ // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 1). – С. 84–87.
6. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.
7. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.
8. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4 (часть 2). – С. 326–330.
9. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.
10. Мусаев В.К. Численное моделирование нестационарных упругих волн напряжений в некоторых задачах методического характера // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 227–230.