УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Водахова В.А., Тлупова Р.Г., Эржибова Ф.А., Болова Д.А.

Кабардино – Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Нагруженные уравнения в частных производных гиперболического, параболического, эллиптического и смешанного типов находят большое применение как метод математического моделирования нелокальных, в том числе фрактальных, процессов и явлений, и метод эффективного поиска приближенных решений дифференциальных уравнений. Математической основой физики фракталов, в особенности дробной динамики, стали нагруженные дифференциальные уравнения, демонстрирующие роль этих уравнений в различных отраслях современной науки, в частности, в математической биологии, физики, химии, инженерной технологии. Настоящая статья посвящена постановке и исследованию однозначной разрешимости одной нелокальной краевой задачи для смешанного нагруженного параболо – гиперболического уравнения третьего порядка. При доказательстве единственности решения поставленной задачи в работе рассматривается три случая: когда дискриминант характеристического уравнения S = 0, S > 0 и S < 0. В случае S = 0 приводится доказательство единственности решения поставленной задачи, а в случаях S > 0 и S < 0 доказательство проводится аналогично. Вопрос существования решения поставленной задачи редуцирован к вопросу разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно следа искомого решения, которая однозначно разрешима.

Ключевые слова: краевая задача, система интегральных уравнений Вольтерра второго рода, смешанное нагруженное уравнение, уравнение гиперболо – параболического типа, преобразование Лапласа

A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED THIRD-ORDER EQUATION

Vodahova V.A., Tlupova R.G., Erzhibova F.A., Bolova D.A.

H.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Loaded partial differential equations of hyperbolic, parabolic, elliptic and mixed types are of great use as a method of mathematical modeling of nonlocal, including fractal, processes and phenomena, and effective method of search approximate solutions of differential equations. The mathematical basis of the physics of fractals, especially fractional dynamics, become loaded differential equations, showing the role of these equations in the various branches of modern science, in particular, in mathematical biology, physics, chemistry, engineering technology. This article is devoted to the formulation and study of the unique solvability of a nonlocal boundary value problem for a mixed- loaded parabolic – hyperbolic equation of the third order. In the proof of the uniqueness of the solution of the problem in this paper we consider three cases: when the discriminant of the characteristic equation S = 0, S > 0 and S < 0. In the case of S = 0 is a proof of the uniqueness of the solution of the problem, and in cases of S > 0 and S < 0 the proof is similar. The question of existence of the solution of the problem is reduced to the question of solvability of a system of Volterra integral equations of the second kind with respect to the track of the desired solution, which is uniquely solvable.

Keywords: boundary value problem, a system of Volterra integral equations of the second kind, mixed loaded equation, hyperbolic – parabolic type, Laplace transform

Нагруженным уравнением в частных производных второго порядка посвящены работы [1-10]. Общее определение этого широкого класса уравнений в частных производных было впервые дано А.М. Нахушевым в работах [7-8].

Многими авторами исследовались нелокальные краевые задачи для смешанных эллиптико – гиперболических и гиперболо – параболических уравнений второго порядка. Нелокальные краевые задачи для смешанного и смешанного нагруженного гиперболо – параболического типов уравнений более высокого порядка, то они остаются мало исследованными.

Цель работы состоит в постановке и исследовании однозначной разрешимости одной нелокальной краевой задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка.

Постановка задачи. Пусть Ω – конечная односвязная область, ограниченная отрезками AA_0, A_0B_0, BB_0 прямых $x = 0$, $y = h$, $x = l$ соответственно, расположенных в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками

$$AC{:}x + y = 0,\ BC{:}x - y = l$$

уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + a_1 u_x + a_0 u + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u\left(x^j, y\right), y > 0, \\ u_{xxx} - u_{xyy}, y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

Ω_1 – параболическая, а Ω_2 – гиперболическая части области Ω.

Предполагается, что $x^j, j=\overline{1,n}$ – фиксированные точки из интервала (0, l), причем $0 \le x^1 < \ldots < x^n \le l$.

Задача. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) = C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{(3,2)}(\Omega_2)$, $u_x \in C(\Omega_1 \cup AA_0 \cup BB_0)$;

2) $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1) при $y \ne 0$;

3) $u(x, y)$ – удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(l,y) = \varphi_2(y), u_x(0,y) - u_x(l,y) = \varphi_3(y), 0 \le y \le h, (2)$$

$$u(x,-x) = \psi_1(x), \frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = \psi_2(x), 0 \le x \le \frac{l}{2}, (3)$$

где

$$\varphi_i(y) \in C([0,y]) \cap C^2(0,1), i=\overline{1,3},\ \psi_i(x) \in C^1([0;1/2]) \cap C^3((0;1/2)), i=1,2.$$

Переходя к пределу в уравнении (1) при $y \to +0$, получим функциональное соотношение между $u(x, 0) = \tau(x)$ и $u_y(x, 0) = \nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_1 на линию $y = 0$, в виде

$$\tau'''(x) - \nu(x) + a_1\tau'(x) + a_0\tau(x) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tau(x^j) = 0\ . \qquad (4)$$

Общее решение уравнения (1) при $y < 0$ задается формулой

$$u(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) - \omega(y), \qquad (5)$$

где $F_1(x), F_2(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J)$.

Удовлетворяя (5) краевым условиям (3), получим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(0) + F_2(2x) - \omega(-x) = \psi_1(x), \\ 2F_1'(0) - \omega'(-x) = \sqrt{2}\psi_2(x). \end{cases}$$

Определим из второго уравнения системы $\omega(-x)$:

$$\omega'(-x) = 2F_1'(0) - \sqrt{2}\psi_2(x).$$

Интегрируя, получим

$$\int_0^x \omega'(-t)\,dt = 2F_1'(0)x - \sqrt{2}\int_0^x \psi_2(t)\,dt.$$

Отсюда, что то же самое

$$-\int_0^x \omega'(t)\,dt = 2F_1'(0)x - \sqrt{2}\int_0^x \psi_2(t)\,dt.$$

и, окончательно,

$$-\omega(x) = 2F_1'(0)x - \sqrt{2}\int_0^x \psi_2(t)\,dt - \omega(0).$$

Подставляя $\omega(-x)$ в первое уравнение системы, найдем

$$F_2(2x) = \psi_1(x) + \sqrt{2}\int_0^x \psi_2(t)\,dt - F_1(0) - 2F_1'(0)x + \omega(0),$$

или

$$F_2(x-y) = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sqrt{2}\int_0^{\frac{x-y}{2}} \psi_2(t)\,dt - F_1(0) - (x-y)F_1'(0) + \omega(0).$$

Из (5) будем иметь

$$u(x,y)=F_1(x+y)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sqrt{2}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\psi_2(t)\,dt-F_1(0)-(x-y)F_1'(0)+$$

$$+\omega(0)-2F_1'(0)y-\sqrt{2}\int_0^{-y}\psi_2(t)\,dt-\omega(0).$$

В результате несложных преобразований последнее принимает вид

$$u(x,y)=F_1(x+y)+\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x-y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{-2y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-(x+y)F_1'(0)-F_1(0). \qquad (6)$$

Дифференцируя (6) по x, а затем по y, и вычитая из первого соотношения второе и переходя к пределу при $y\to-0$, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_2 на линию $y=0$ в виде

$$\tau'(x)-\nu(x)=\theta(x), \qquad (7)$$

где

$$\theta(x)=\psi_1(x/2)+\sqrt{2}\psi_2(z/2)-\sqrt{2}\psi_2(0).$$

Исключая $\nu(x)$ из (4) и (7), с учетом граничных условий (2), получим для определения $\tau(x)$ следующую задачу:

$$\tau'''(x)+(a_1-1)\tau'(x)+a_0\tau(x)=\rho(x), \qquad (8)$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau(l)=\varphi_2(0),$$

$$\tau'(0)-\tau'(l)=\varphi_3(0), \qquad (9)$$

где $\rho(x)=\theta(x)-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\tau(x_j)$.

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению

$$\tau'''(x)+(a_1-1)\tau'(x)+a_0\tau(x)=0 \qquad (8')$$

имеет вид

$$k^3+(a_1-1)k+a_0=0. \qquad (10)$$

Введем обозначение $S=\dfrac{a_0^2}{4}+\dfrac{(a_1-1)^3}{27}$.

Известно [2], что уравнение (10) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, если $S>0$. Оно имеет три различных действительных корня, если $S<0$. При $S=0$ все три корня уравнения (10) действительны, причем два из них равны.

Пусть $S=0$, т.е. $\dfrac{a_0^2}{4}\neq 2\left[\dfrac{(a_1-1)}{3}\right]^{3/2}$.

В этом случае имеем, что

$$k_1=\frac{3a_0}{(a_1-1)},\ k_2=k_3=k=-\frac{3a_0}{2(a_1-1)}.$$

Так как общее решение уравнения (8′) в этом случае имеет вид

$$\tau(x)=c_1e^{k_1x}+(c_2+c_3x)e^{kx},$$

методом вариации постоянных, находим общее решение уравнения (8) в виде

$$\tau(x)+m(x)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tau(x^j)=n(x),(11)$$

где $m(x)=G(x)+\rho_1e^{k_1x}+(\rho_3+x\rho_5)e^{kx}$,

$$n(x)=P(x)+\rho_2e^{k_1x}+(\rho_4+x\rho_6)e^{kx},$$

причем, $G(x)$, $P(x)$,ρ_i – известные функции.

Полагая в равенстве (11) поочередно $x=x^1$, $x=x^2,\ldots,$ $x=x^n$, получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно $\tau(x)$,

$$\tau_i+m_i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tau_j=n_i, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}, \qquad (12)$$

где $m_j=m(x^j), n_j=n(x^j), \tau_j=\tau(x^j)$.

При выполнении условия

$$\Delta_n=1+\sum_{j=1}^{n}\lambda_jm_j\neq 0 \qquad (13)$$

система (12) имеет единственное решение

$$\tau(x^j)=\frac{1}{\Delta n}\left(n_j+\sum_{i=1}^{n}m_i(n_j\lambda_i-\lambda_jn_i)\right). \qquad (14)$$

Таким образом, подставляя (14) в (11), находим единственное решение задачи

(8), (9). Легко заметить, что $\tau(0) \equiv 0$, если $\varphi_i(0) = 0, i = \overline{1,3}$.

После определения функции $\tau(x)$ мы приходим к задаче (2), $u(x, 0) = \tau(x)$ в области Ω_1. Допустим, что однородная задача имеет нетривиальное решение $v(x, y)$. Положим

$$u(x,y) = v(x,y)e^{\lambda x + \mu y}, \qquad (15)$$

где λ, μ – некоторые постоянные. Для функции $v(x, y)$ получим уравнение

$$M(v) = v_{xxx} + 3\mu v_{xx} + (a_1 + 3\mu)v_x +$$

$$+(a_0 + a_1\mu + \mu^3 - \lambda)v +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v(x^j, y) e^{(x^j - x)\lambda} - v_y = 0$$

и краевые условия

$$v(0,y) = 0, v(l,y) = 0, v_x(0,y) -$$

$$-v_x(1,y) = 0, 0 \le y \le h, v(x,0) = 0. \qquad (16)$$

По предположению, в силу (15), эта задача имеет нетривиальное решение $v(x, y)$.

Рассмотрим тождество

$$vLv = \left(vv_{xx} - \frac{1}{2}v_x^2 + 3\mu v v_x + \frac{1}{2}(a_1 + 3\mu)v^2\right)_x -$$

$$-\frac{1}{2}(v^2)_y - 3\mu v_x^2 + (a_0 + a_1\mu + \mu^3 - \lambda)v^2 +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v(x^j, y) v(x,y) e^{(x^j - x)\lambda}] = 0.$$

Интегрируя это тождество по области Ω_1 и учитывая однородные граничные условия (16) получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 v^2(x^j, y)dx^j -$$

$$-l\int_0^h \sum_{j=1}^{n} (a_0 + a_1\mu + \mu^3 - \lambda + \lambda_j) v^2(x^j, y) -$$

$$-3\mu v_x^2(x^j, y) = 0 \qquad (17)$$

Выберем λ и μ так, чтобы $\mu < 0, a_0 + a_1\mu + \mu^3 - \lambda + \lambda_j < 0$. При таком выборе λ и μ левая часть равенства (17) становится строго положительной, что невозможно, если $v(x, y) \neq 0$. Отсюда следует, что $v(x^j, y) = 0$. Отсюда будем иметь, что $v(x^j, y) \equiv 0$ для всех $(x, y) \in \overline{\Omega}_1$, и, согласно (15), $u(x, y) \equiv 0$ для всех $(x, y) \in \overline{\Omega}_1$. В области Ω_2 однородная задача $v(x, 0) = 0$, $v(x,-x) = 0, \frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = 0$ для уравнения (1) при $y < 0$ имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$ для всех $(x, y) \in \overline{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x, y) = 0$ в Ω_2.

Для доказательства существования решения поставленной задачи рассмотрено уравнение

$$L(u) \equiv u_{xxx} + a_1u_x + a_0u - u_y +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u(x^j, y) = f(x^j, 0). \qquad (18)$$

Доказано, что при

$$f(x^j, y) \subset C^2(\Omega), f(x^j, 0) = f_y(x^j, 0) = 0$$

краевая задача

$$\begin{cases} L(u) = f(x^j, y), (0 < x < 1, 0 < y \le 1), \\ u(0,y) = 0, u(1,y) = 0, \\ u_x(0,y) - u_x(1,y) = 0, (0 \le y \le 1), \\ u(x,0) = 0, (0 \le x \le 1), \end{cases} \qquad (19)$$

имеет решение.

Существование решения задачи (18), (19) устанавливается с помощью преобразования Лапласа и сведением задачи к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, относительно следа искомого решения, которая однозначно разрешима.

Список литературы

1. Водахова В.А. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. – 2007. – С. 57–60.
2. Водахова В.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева. // Дифференциальные уравнения, 1983. – Т. 19. № 1. – С. 163–166.
3. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Задача Дирихле для смешанного параболо – гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами. Успехи современного естествознания. – 2013. – № 11. – С. 136–140.
4. Водахова В.А., Гучаева З.Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Успехи современного естествознания. – 2014. – № 7. – С. 90–92.
5. Водахова В.А., Тлупова Р.Г., Шерметова М.Х. Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1-1. – С. 71–75.
6. Езаова А.Г., Думаева Л.В. Об одной внутренне – краевой задаче для уравнения третьего порядка с группой младших членов. Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2-27. – С. 6032–6036.
7. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. / Научн. – исслед. инс – т прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. – М.: Наука, 2012. – 232 с.
8. Нахушев А.М., Краевые задачи для нагруженных интегро- дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференциальные уравнения, 1979. – Т. 15. № 1. – С. 96–105.
9. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико – математические науки». – 2013. – № 1(30). – С. 150–158.
10. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. № 6. – С. 755–763.