УДК 330.42

ОПТИМАЛЬНЫЙ СЦЕНАРИЙ РАЗВИТИЯ РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Грибов А.Ф., Максимов Д.А.

ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова», Москва,
e-mail: afgribov@mail.ru, maksimovdenis@mail.ru

Россию ждет затяжная стагнация, если не будет реформ, – так оценивают нынешнее состояние большинство специалистов. Минфин просчитал основные варианты развития российской экономики на период до 2030 г. Представляется целесообразным, наряду с консервативным, инерционным и инновационным вариантами развития, рассмотреть также и оптимальный. В статье, на основе теории оптимального управления, рассматривается оптимально-целевой сценарий развития, который позволит экономике выйти на темпы роста в 2-3%. Ключевое условие для этого – структурные изменения в экономике – повышение отдачи на капитал за счет роста производительности труда, опережающего рост зарплат, и, как результат, увеличение доли инвестиций в ВВП. Предлагается экономико-математическое описание оптимального сценария российской экономики с прогнозом до 2030 г.

Ключевые слова: оптимальное управление, инвестиции, стагнация, темпы роста, сценарий развития, российская экономика

OPTIMUM SCENARIO OF DEVELOPMENT OF THE RUSSIAN ECONOMY

Gribov A.F., Maximov D.A.

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, e-mail: afgribov@mail.ru, maksimovdenis@mail.ru

Russia will have a prolonged stagnation, if there are no reforms, assess the current state of the majority of experts. The Ministry of Finance has calculated the basic variants of development of the Russian economy on the period until 2030 it Seems appropriate, along with conservative, inertial and innovative variants of development, to also consider optimal. The article, based on the theory of optimal control is considered the optimal target development scenario, which will allow the economy to reach a growth rate of 2-3%. The key prerequisite for this is structural changes in the economy – improving the return on capital through productivity growth outstripping wage growth, and, as a result, the increase in the share of investment in GDP. The economic-mathematical description of the optimum scenario of the Russian economy with the forecast till 2030 is offered.

Keywords: optimal control, investment, stagnation, growth, development scenario of the Russian economy

Россию ждет затяжная стагнация, если не будет реформ, – так оценивают нынешнее состояние большинство специалистов. Минфин просчитал основные варианты развития российской экономики на период до 2030 г. Представляется целесообразным, наряду с консервативным, инерционным и инновационным вариантами развития, рассмотреть также и оптимальный. В этой связи необходимо обратиться к теории оптимального управления. Под *управлением* понимается прямое воздействие на систему, направленное на достижение заданного результата. В этом отличие управления от *регулирования*, которое осуществляется на основе сравнения регулируемого (выходного) показателя с задающим (входным).

Под *оптимальным управлением* понимается выбор из многих возможных такого варианта управления, который по заданному критерию является оптимальным [4].

Поведение любой нелинейной много-связной системы описывается следующими уравнениями движения [2]:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y, x, t), y_i(0) = y_i^0, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где y – вектор фазовых координат, задающий состояние системы; x – вектор внешних (входных) задающих и (или) возмущающих воздействий на систему; y_i^0 – начальные значения фазовых переменных.

Если возмущающие воздействия пренебрежимо малы, некоторые из задающих воздействий становятся управляющими, а другие являются заданными известными функциями времени, то приходим к следующим уравнениям для управляемой динамической системы:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y, u, t), y_i(0) = y_i^0, i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где u – вектор управляющих параметров, $u \in U$; U – область допустимых значений управляющих параметров.

Управляющая траектория (управление) $u(t)$ называется допустимой, если она кусочно-непрерывна, в точках разрыва непрерывна слева:

$$u(\tau) = u(\tau - 0) = \lim_{t \rightarrow \tau} u(t), \text{ и кроме того } t < \tau$$

при любом $t, u(t) \in U$.

Если задан закон управления, т. е. определена допустимая управляющая траектория $u(t)$, то уравнения для фазовых переменных принимают вид:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y, u, t), \quad y_i(0) = y_i^0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

тем самым при любых начальных условиях $y(0) = y^0$ однозначно определяется решение.

В качестве критерия оптимальности выбирается некоторый функционал от фазовой и управляющей траекторий, который подлежит максимизации (минимизации). Необходимые условия для решения такой задачи дает принцип максимума Понтрягина.

Принцип максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина применяется к общей задаче управления, имеющей вид [3]:

$$\max_{u \in U} \int_0^T f_0(y, u, t) dt + F(y^T, T) \quad (4)$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец фазовых переменных, определяющих состояние динамической системы;

$$f(y, u, t) = \begin{pmatrix} f_1(y, u, t) \\ \dots \\ f_n(y, u, t) \end{pmatrix} \quad \text{– вектор-столбец}$$

правых частей уравнений системы;
 y^0, y^T – начальное и конечное значения вектора состояния;

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} \quad \text{– вектор-столбец управляющих}$$

параметров;

U – область возможных значений управляющих параметров;

$f_0(y, u, t)$ – подынтегральная функция критерия управления.

Функции $f(y, u, t)$, $F(y^T, T)$ – непрерывны и дифференцируемы по каждому аргументу. Если определено уравнение $u(t)$, то однозначно при заданном начальном условии $y(0) = y^0$ определена траектория системы $y(t)$. Траекторию системы, соответствующую оптимальному управлению $u^*(t)$, назовем *оптимальной* и обозначим $y^*(t)$.

Как известно, задача нелинейного программирования сводится к поиску седловой точки функции Лагранжа [1]. Именно этот подход применяется и для решения задачи (4). Роль переменных выполняют управля-

ющие переменные и, ограничениями служат дифференциальные уравнения для фазовых переменных

$$f(y, u, t) - \frac{dy}{dt} = 0, \quad (5)$$

а роль функции цели выполняет функционал

$$J(u) = \int_0^T f_0(y, u, t) dt + F(y^T, T). \quad (6)$$

Построим функцию Лагранжа для этой задачи:

$$L(u, \psi) = \int_0^T f_0(y, u, t) dt + F(y^T, T) + \int_0^T \psi(t) \left[f(y, u, t) - \frac{dy}{dt} \right], \quad (7)$$

где $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_2(t))$ – вектор-строка множителей Лагранжа, которые в этой ситуации называются сопряженными переменными (по отношению к фазовым).

Подынтегральная функция в последнем интеграле выражения (7) – это матричная форма записи скалярного произведения вектора-строки $\psi(t)$ на вектор-столбец

$$\left[f(y, u, t) - \frac{dy}{dt} \right]:$$

$$\begin{aligned} \psi(t) \left[f(y, u, t) - \frac{dy}{dt} \right] &= \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left[f_i(y, u, t) - \frac{dy}{dt} \right] \end{aligned}$$

Седловая точка (точнее, траектория) $u^*(t), y^*(t)$ определяется как решение неравенства

$$\begin{aligned} L[u(t), \psi^*(t)] &\leq L[u^*(t), \psi^*(t)] \leq \\ &\leq L[u^*(t), \psi(t)] \end{aligned} \quad (8)$$

Если $u^*(t), \psi^*(t)$ – седловая точка, то $u^*(t)$ – оптимальное управление, т. е. решение задачи (8).

В самом деле, правое неравенство (8)

$$L[u^*(t), \psi^*(t)] - L[u^*(t), \psi(t)] \leq 0, \quad (9)$$

тем самым на оптимальной траектории выполнены уравнения системы

$$f(y^*, u^*, t) - \frac{dy^*}{dt} = 0$$

(если бы в некоторых точках уравнения системы не выполнялись, то подбором функций можно было бы сделать неравенство

(9) строго большим нуля, т.е. приходим к противоречию). Рассмотрим левое неравенство (8), из него следует:

$$J[u^*(t)] \geq J[u(t)] + \int_0^T \psi^*(t) \left[f(y, u, t) - \frac{dy}{dt} \right] dt$$

поэтому для всех управлений $u(t)$, для которых выполняются уравнения системы (5),

$$J[u^*(t)] \geq J[u(t)].$$

т.е. действительно $u^*(t)$ – оптимальное решение (управление) задачи (4). При этом максимальное значение критериального функционала задачи (4) равно значению функции Лагранжа в седловой точке.

Необходимые условия оптимальности (принцип максимума)

Итак, если $u^*(t)$, $\psi^*(t)$ – седловая точка, то $u^*(t)$ – оптимальное решение задачи (4). Поэтому необходимые условия существования седловой точки являются одновременно и необходимыми условиями максимума задачи (4).

Если сопряженные переменные получили бесконечно малые приращения Δu , то согласно выражению (7) функция Лагранжа получила бесконечно малое приращение:

$$\Delta L = \int_0^T \Delta \psi \left[f(y, u, t) - \frac{dy}{dt} \right] dt$$

Поскольку $u^*(t)$, $\psi^*(0)$ – седловая точка, то, согласно правому неравенству (8), в этой точке функционал $L(u^*, \psi)$ достигает минимума по ψ , поэтому для любого бесконечно малого приращения $\Delta \psi$ в окрестности этой точки $\Delta L = 0$, и тем самым

$$f(y^*, u^*, t) - \frac{dy^*}{dt} = 0$$

т.е. для управления $u^*(t)$ и соответствующей ему фазовой траектории $y^*(t)$ выполняются уравнения системы.

Остальные необходимые условия оптимальности следуют из левого неравенства для седловой точки.

Прежде всего путем интегрирования по частям функция Лагранжа преобразуется к виду

$$L(u, \psi) = \int_0^T \left[f_0(y, u, t) + \psi f(y, u, t) + \frac{d\psi}{dt} y \right] dt + F(x_T, T) - [\psi(T) - \psi(0)]y(0)$$

Первые два слагаемых под знаком интеграла называются *функцией Гамильтона*:

$$H(y, u, \psi, t) = f_0(y, u, t) + \psi(t) f(y, u, t), \quad (10)$$

поэтому функция Лагранжа преобразуется к виду

$$L(u, \psi) = \int_0^T \left[H(y, u, \psi, t) + \frac{d\psi}{dt} y \right] dt + F(y_T, T) - [\psi(T)y(T) - \psi(0)y(0)]. \quad (11)$$

Если управление $u(t)$ получило приращение $\Delta u(t)$, то фазовая траектория изменилась с $y(t)$ на $y(t) + \Delta y(t)$, а функция Лагранжа получила приращение:

$$\Delta L = \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial u} \Delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Delta y \right] dt + \left(\frac{\partial F}{\partial y_T} - \psi(T) \right) \Delta y_T, \quad (12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial H}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u_m} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)$$

Поскольку для существования максимума необходимо $\Delta L = 0$ при любых Δu , то, приравняв нулю (12), получаем необходимые условия максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, 0 \leq t \leq T \quad (13)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y}, 0 \leq t \leq T \quad (14)$$

$$\psi(T) = \frac{\partial F}{\partial y_T}. \quad (15)$$

Условия (13) – это условия существования локального максимума функции Гамильтона без учета ограничений на управляющие параметры. Если такие ограничения есть, то условия (13) заменяются следующими:

$$\max_{u \in U} H(y, u, \psi, t). \quad (16)$$

Согласно условию оптимальности (16) функция Гамильтона в любой момент t либо должна принимать свой внутренний (локальный) максимум, и тогда должно выполняться условие $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, либо максимум достигается на границе, тогда $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$, где n – направление нормали к границе.

Из выражения для функции Гамильтона (10) видно, что $\frac{\partial H}{\partial \psi} = f(y, u, t)$, но

$$f(y, u, t) = \frac{dy}{dt}, \text{ поэтому } \frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{dy}{dt}.$$

Таким образом, процедура применения принципа максимума задаче (4) состоит в следующем.

Сначала вводятся сопряженных переменных затем строится функция Гамильтона: $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ после чего определяются функции $u(t)$, $\psi(t)$, $y(t)$, удовлетворяющие условиям:

$$\max_{u \in U} H(y, u, \psi, t),$$

$$y_i(0) = y_i^0,$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i},$$

$$y_i(0) = y_i^0, j = 1, \dots, n,$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i},$$

$$\psi_i(T) = \frac{\partial F}{\partial y_i^T}.$$

Если кроме уравнений движения есть и другие ограничения, то они обычным образом включаются в функцию Лагранжа, а следовательно, и в функцию Гамильтона [5].

Принцип максимума дает лишь необходимые условия оптимальности. Действительно, оптимальная траектория состоит из

некоторых участков управляющих траекторий, определенных по этому принципу.

Выводы

Если ничего не делать, в том числе со структурой бюджета, то сценарий долгосрочной стагнации может реализоваться. Но расчеты показывают, что наиболее вероятным является другой, оптимально-целевой сценарий развития, который позволит экономике выйти на темпы роста в 2-3%. Ключевое условие для этого – структурные изменения в экономике – повышение отдачи на капитал за счет роста производительности труда, опережающего рост зарплат, и, как результат, увеличение доли инвестиций в ВВП. Такой подход требует повышения гибкости рынка труда, мобильности работников, вложений в их переобучение. В этом случае экономика сможет преодолеть экономический спад уже в 2018 г., увеличиваясь к 2030 г. на 44%.

Список литературы

1. Бельченко С.В., Халиков М.А., Щепилов М.В. Управление транзакционными издержками интегрированной группы предприятий: методы и модели. – Тула: Гриф и К, 2011. – 171 с.
2. Закревская Е.А. Модели и методы оценки и управления стоимостью инновационно-ориентированного предприятия // автореферат на соис. уч. степ. к.э.н., РЭУ им. Г.В. Плеханова, 2012. – 23 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 592 с.
4. Халиков М.А., Хечумова Э.А., Щепилов М.В. Модели и методы выбора и оценки эффективности рыночной и внутрифирменной стратегий предприятия. – М.: Коммерческие технологии, 2015. – 595 с.
5. Шевелевич К.В. Законы сравнительной статистики для межотраслевого баланса с разложимой матрицей прямых затрат // Приоритетные научные исследования и разработки: сборник статей Международной научно-практической конференции, Саратов, 13 февраля 2016 г./ отв. ред. А.А. Сукиасян. – Уфа, 2016. – С. 130–131.