

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ НЕКРУГОВЫХ МЕМБРАН

¹Агаларов Дж.Г., ¹Мамедова Г.А., ²Агасиев С.Р.

¹Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, e-mail: gular-gulshan@rambler.ru;

²Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Баку, e-mail: bakisamir@mail.ru

Уравнения колебания мембран допускают классы частных решений отвечающие некруговым областям. Приведены решения соответственно различным закреплениям, в том числе для некруговой мембраны с двух сторон закрепленной, а с двух сторон свободной.

Ключевые слова: колебания, потенциал, частота, мембран

VARIATIONS NON-CIRCULAR MEMBRANE

¹Agalarov C.Q., ¹Mamedova G.A., ²Aqasiev S.R.

¹Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, e-mail: gular-gulshan@rambler.ru;

²Azerbaijan Architecture and Construction University, Baku, e-mail: bakisamir@mail.ru

The equations of the membrane vibrations allow classes corresponding to particular solutions are non-circular areas. The solutions according to the different enshrined, including for non-circular membrane clamped on two sides and from both sides free.

Keywords: oscillations, potential, frequency, membranes

К задачам уравнения колебаний приводят многие вопросы математической физики, представляющие теоретический интерес и имеющие большое прикладное значение.

Решён широкий круг задач для круговых и прямоугольных областей. Для областей, не являющихся таковыми применяются различные методы, в частности приводящие к интегральным уравнениям. Однако, последние служат для доказательства существования и единственности решения. В основном эти задачи решаются численными методами. Немалый интерес представляют простые решения задач для областей частного вида.

Ниже рассматривается движение мембраны это различных случаев закрепления.

Поперечные колебания тонкой плоской мембраны, которой сообщено равномерное напряжение, можно рассматривать аналогично колебаниям струны с тем лишь дополнением, что число независимых переменных, входящих в дифференциальное уравнение, будет теперь равно трём вместе двух [1, 2].

Уравнение движения мембраны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}$$

где U перемещение

В случае колебательного движения, т.е. $U_1 = U \exp(i\omega t)$ оно примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{a^2} U = 0 \quad (1)$$

Аналогичные уравнения могут быть получены для потенциалов перемещений при плоском движении упругого тела.

Рассмотрим следующей класс частных решений уравнения (1)

$$U = \alpha \cos \frac{\omega}{a} x + \beta \cos \frac{\omega}{a} y \quad (2)$$

В случае $\alpha = \beta$, приравняв U из (2) нулю, т.е.

$$\alpha \cos \frac{\omega}{a} x + \beta \cos \frac{\omega}{a} y = 0,$$

получим $x + y = \pm \frac{\pi a}{\omega}$, что отвечает закреплению мембран на квадратном контуре (рис. 1). Полагая

$$x = y = \frac{l}{2\sqrt{2}},$$

получим

$$\omega = \frac{2\pi a\sqrt{2}}{l} \quad (3)$$

выражение частоты для квадрата со стороной l , что известно из литературы.

Теперь рассмотрим случай $\alpha \neq \beta$. Приравняв U из (2) нулю, получим

$$\alpha \cos \frac{\omega}{a} x + \beta \cos \frac{\omega}{a} y = 0 \quad (4)$$

Что соответствуют закреплению мембран на участках ABC (рис. 2)

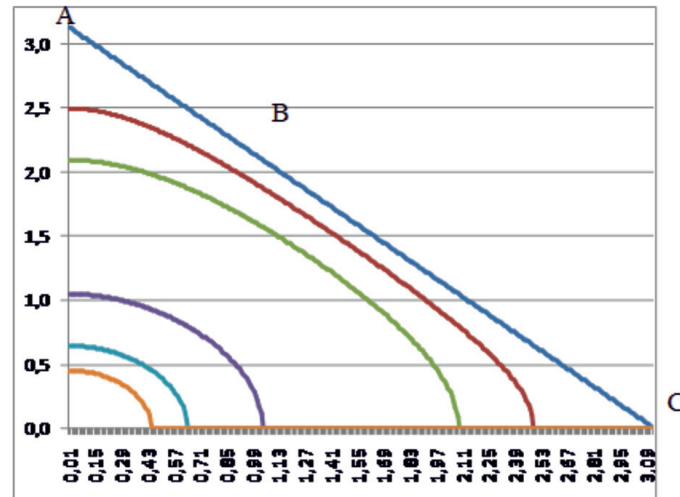


Рис. 1. $K = 0$; $K = 0.2$; $K = 0.5$; $K = 1.5$; $K = 1.8$; $K = 1.9$; $L = 1$

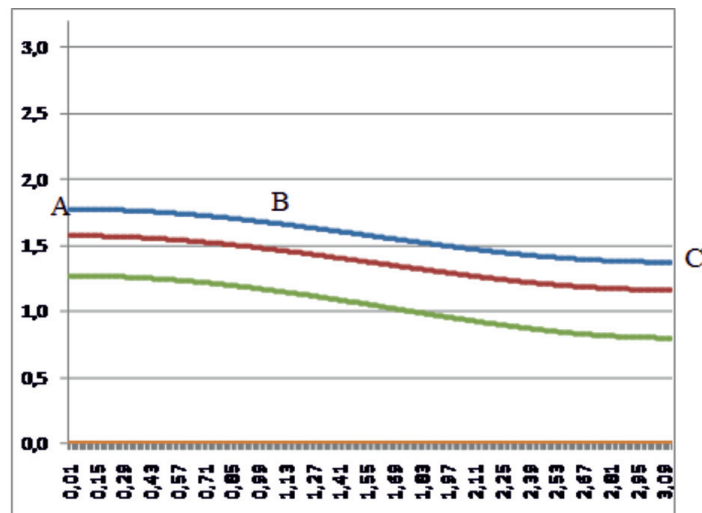


Рис. 2. $K = 0$; $K = 0.2$; $K = 0.5$; $K = 1.5$; $K = 1.8$; $K = 1.9$; $L = 0.2$

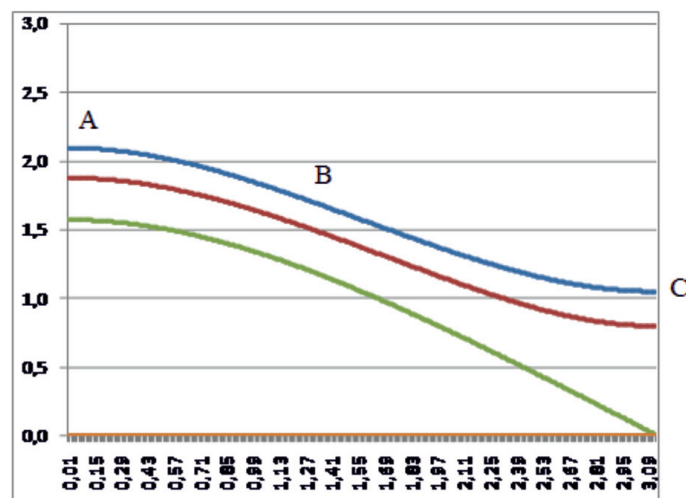


Рис. 3. $K = 0$; $K = 0.2$; $K = 0.5$; $K = 1.5$; $K = 1.8$; $K = 1.9$; $L = 0.5$

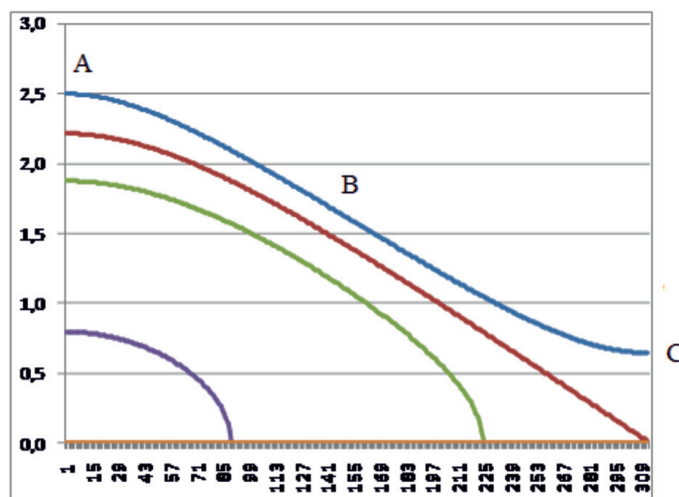


Рис. 4. $K = 0$; $K = 0.2$; $K = 0.5$; $K = 1.5$; $K = 1.8$; $K = 1.9$; $L = 0.8$

Пологая $x = y = \frac{l}{2\sqrt{2}}$, получим (3), т.е. частота не зависит от α и β (от угла поворота сторон ABC многоугольника). В частности, при $\alpha = 0$ имеем прямоугольную мембрану, закрепленную с двух противоположных сторон.

Сравним частоту колебаний квадрата (3) с частотами вписанной и описанной окружностей, которые определяются из уравнения

$$J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) = 0 \quad (5)$$

где J_0 – функции Бесселя нулевого порядка. Из (5) для первой частоты

$$\omega = 2,4 \frac{a}{r} \quad (6)$$

Мембраны некруговой формы могут использоваться в ограждениях, для перекрытия оконных проемов, в качестве парусов на судах и т.

Здесь рассматриваются свободные колебания мембран, закрепленных с двух сторон при различных закреплениях; аналогичные задачи могут быть рассмотрены и для пластин.

Изменяя отношения $L = \frac{\beta}{\alpha}$ можно менять форму мембраны при $L = \frac{\beta}{\alpha} = 1$ имеет место квадратная мембрана; при $L = 0$ имеет место прямоугольная мембрана с двух сторон закрепленная, а с двух других свободная.

На рисунках показаны четыре варианта ($L = \beta/\alpha$) мембран, закрепленных с двух сторон по криволинейным за исключением первой, границам. Две другие границы, прямые, свободны. Также на рисунках показаны линии уровня мембран для $U = K$. На рис. 1 представлена квадратная мембрана, решение для которой известно.

Рис. 1. соответствует $L = 1$, т.с. квадратной мембране, рис. 2 $L = 0,2$, рис. 3 $L = 0,5$, рис. 4 $L = 0,8$.

Список литературы

1. Власова Е.В. О собственных поперечных колебаниях изотропных прямоугольных пластик при наличии усилий в срединной плоскости. Наука и техн. прогресс. – 2010. – № 3. – С. 39–41.
2. Лопатин А.В., Деев П.О. Определение основной частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины с двумя свободными краями. Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – № 1. – С. 46–50.