

УДК 517.8; УДК 530.1

**ТРЕТИЙ КЛАСС ТОЧНО РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОГО
УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ.
ЗАДАЧИ СО СВЯЗЯМИ. НЕЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР**

Гришкан Ю.С., Усольцев О.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, e-mail: ugrish@yandex.ru

Построено точное решение стационарного уравнения Шредингера для нелинейного осциллятора, потенциальная энергия которого задаётся произвольным полиномом 4 порядка. Найден и построен спектр одной из потенциальных ям этого решения, принадлежащая типу «бутылочка», с помощью которой в квантовой теории поля иллюстрируется эффект спонтанного нарушения симметрии. Показано, что это решение, найденное методом присоединённого уравнения Риккати, принадлежит к новому ранее неизвестному классу решений – квантовым решениям со связями

Ключевые слова: групповые методы, классы точных решений, уравнение Шрёдингера

ELECTROMAGNETIC FIELD WITH WEAK LORENZ VIOLATION

Grishkan Yu.S., Usoltsev O.A.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, e-mail: ugrish@yandex.ru

It is constructed a new exact solution fo a nonlinear oscillator the with 4 order polynomial potential energy. It is concluded a quantum spectrum for one of the potential hole of the «bottle» type. Those potential illustrate as a rule of the spontaneous symmetry breaking effect. The construted solution constrained by the attached Riccati equation method is a part of a new III class of exact solution – a class of quantum solutions with constraints.

Keywords: group methods, classes of exact solutions, Schrodinger equation

Построим пример решения задачи со связями для одномерного стационарного уравнения Шрёдингера. Выберем $\hbar = 1$, $[p, f(q)] = -i \frac{df}{dq}$ с помощью метода факторизации [1, 2].

Как известно [1], уравнение Шрёдингера в координатном представлении

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (1)$$

после введения цепочки лестничных пары лестничных операторов

$$\hat{a}_n = p + i f_n(q); \hat{a}_n^+ = p - i f_n(q);$$

сводится к нелинейному операторному уравнению Риккати для операторной функции $f_n = f_n(x)$ в координатном представлении:

$$\frac{df_n}{dx} + f_n^2 = U_n(q) - E_n \quad (2)$$

Цепочка операторов $\{E_n\}$ образует спектр оператора Гамильтона

$$H = H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r}).$$

Для простоты, не будем писать «шляп» над операторами.

Цепочка операторов $\{H_n\}$ факторизуется

$$H_n = a_n^+ a_n + E_n \quad (3)$$

Для нахождения спектра E_n рассмотрим одномерное движение $f_n = f_n(q)$ и построим III класс точно решаемых задач для полиномиальных потенциалов. В качестве примера, выберем одномерный потенциал 4 порядка

$$U_n(q) = A_n q^4 + B_n q^3 + C_n q^2 + D_n q + U_{n0} \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$f_n = \alpha_n q^2 + \beta_n q + \gamma_n \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (2), получим таблицу алгебраических уравнений для коэффициентов (4), (5)

Таблица 1

Уравнения для нахождения коэффициентов цепочки на нулевом шаге математической индукции

q^4	$\alpha_0^2 = A_0$
q^3	$2\alpha_0\beta_0 = B_0$
q^2	$\beta_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 = C_0$
q	$2\alpha_0 + 2\beta_0\gamma_0 = D_0$
q^0	$\beta_0 + \gamma_0^2 = U_0 - E_{n0}$

Таблица 2
Уравнения для нахождения коэффициентов цепочки на шаге n математической индукции

q^4	$\alpha_n^2 = A_n$
q^3	$2\alpha_n\beta_n = B_n$
q^2	$\beta_n^2 + 2\alpha_n\gamma_n = C_n$
q	$2\alpha_n + 2\beta_n\gamma_n = D_n$
q^0	$\beta_n + \gamma_n^2 = U_n - E_n$

Получили 5 известных коэффициентов цепочки A_n, B_n, C_n, D_n, E_n , и 3 неизвестных $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Построим цепочку (3) явно.

$$a_0 = p + if_0 = p + i(\alpha_0 q^2 + \beta_0 q + \gamma_0)$$

$$a_0^+ = p - if_0 = p - i(\alpha_0 q^2 + \beta_0 q + \gamma_0) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 - 2i[p, (\alpha_0 q^2 + \beta_0 q)] = \\ &= H_0 - 4\alpha_0 q - 2\beta_0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} H_n &= p^2 + U_n(q) = p^2 + A_n q^4 + \\ &+ B_n q^3 + C_n q^2 + D_n q + U_{n0} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$D_n = D_0 - 4 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = D_0 - 4n\alpha_0,$$

$$U_n = U_0 - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k = U_0 - 2n\beta_0 \quad (9)$$

$$\alpha_k = \alpha_0, \beta_k = \beta_0$$

Используя табл. 1, 2, уравнения (8)-(9) получаем решения для последовательностей неизвестных $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$.

$$\alpha_0 = \sqrt{A_0} s, \beta_0 = \frac{B_0}{2\sqrt{A_0}} s \quad (10)$$

Где знак $s = \pm 1$.

Первая степень q в табл. 2 приводит к алгебраическому уравнению

$$D_n = 2\alpha_0 + 2\beta_0\gamma_n \quad (11)$$

Из (9)-(11) следует уравнение

$$\gamma_n = \frac{\left\{ D_0 - 4\sqrt{A_0} ns - 2\sqrt{A_0} s \right\}}{\frac{B_0}{\sqrt{A_0}}} s \quad (12)$$

Уравнение для первой степени q из табл. 2 выглядит следующим образом

$$E_n = U_0 - \frac{B_0}{\sqrt{A_0}} ns - \beta_0^2 - \gamma_n^2 \quad (13)$$

Подставляя (12) в (13) и перегруппировывая члены, получаем уравнение для спектра

$$\begin{aligned} E_n &= U_0 - \frac{B_0}{\sqrt{A_0}} \left(n + \frac{1}{2} \right) s - \\ &- \frac{\left\{ D_0 - 4\sqrt{A_0} s \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^2}{B_0^2} A_0 \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) видно, что по коэффициентам A_0, B_0 в спектре отсутствует предельный переход $A_0, B_0 \rightarrow 0$. Тогда, как по классическому трению этот переход возможен. Операция $D_0 \rightarrow 0$ в (14) не запрещена.

В системе алгебраических уравнений из табл. 2 есть одна связь между коэффициентами. Выпишем её явно. Из строк при коэффициентах q^3, q^2 этой таблицы при значении квантового числа $n=0$ возникают уравнения

$$C_0 = \beta_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0$$

$$D_0 = 2\alpha_0 + 2\beta_0\gamma_0 \quad (15)$$

Разрешая (15) относительно γ_0 , получаем связь между коэффициентами квантового осциллятора

$$\left(C_0 - \frac{B_0}{4\sqrt{A_0}} \right) B_0 = (D_0 - 2\sqrt{A_0} s) 2A_0 \quad (16)$$

Для связи (16) справедливо отмеченное выше замечание относительно возможных предельных переходов.

Заметим, что из-за отсутствия предельных переходов по коэффициентам A_0, B_0 .

В квантовой механике отсутствуют точные решения для полиномиальной потенциальной ямы третьего порядка и для поля вида

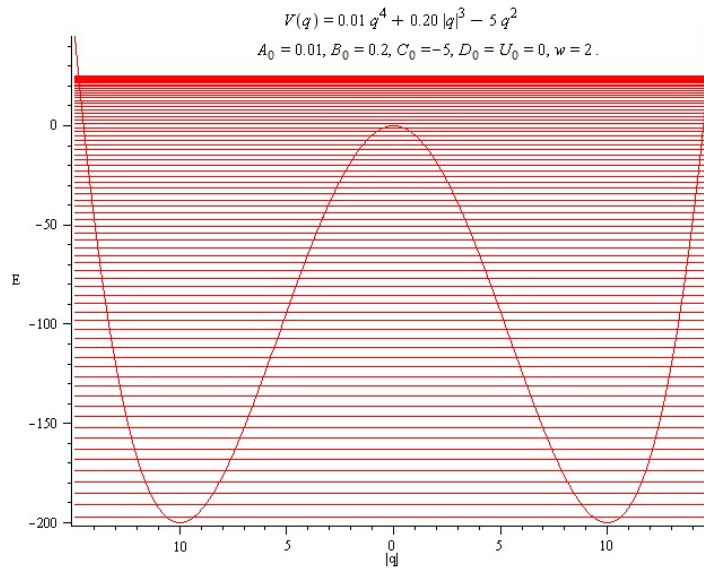
$$U(q) = Aq^4 + Cq^2 \quad (17)$$

Вернёмся теперь к спектру (14).

$$\text{Положим } D_0 = 0, \frac{B_0}{\sqrt{A_0}} = \hbar\omega$$

Тогда спектр (14) примет вид

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - 16 \frac{A_0}{(\hbar\omega)^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + U_0 \quad (18)$$



Потенциальная яма нелинейного осциллятора при значениях параметров $A_0 = 0,01, w = 2$

Отсюда видно, что размерность коэффициента $[A_0] = (\hbar w)^3$. Сам же объект, изучаемый в настоящей статье, в частном случае (18) является нелинейным квантовым осциллятором. Для этого объекта нет предельного перехода к классическому осциллятору как по постоянной Планка $\hbar \rightarrow 0$, так и по частоте колебаний $w \rightarrow 0$.

Выражаясь языком квантовой теории поля, можно сказать, что этот объект одновременно содержит как ультрафиолетовую расходимость $w \rightarrow \infty$ и инфракрасную расходимость $w \rightarrow 0$.

Отметим аналогию между построенным объектом и квантовой «бутылочкой», на которой обычно демонстрируется спонтанное нарушение симметрии квантовых полей.

Потенциальная яма существует для (16) в области значений коэффициентов $A_0 \ll 1, B_0 / A_0 \ll 1$.

Выберем естественную систему единиц $\hbar = 1$. Построим потенциальную яму и спектр значений энергии.

Для выбранной выше частоты w потенциальная яма имеет вид:

$$U(q) = A_0 q^4 + w \sqrt{A_0} q^3 - \frac{w}{4} q^2 + U_0 \quad (19)$$

Спектр значений энергии в потенциальной яме (19) есть:

$$E_n = w \left(n + \frac{1}{2} \right) - 16 \frac{A_0}{w^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + U_0 \quad (20)$$

Выделяя полный квадрат, преобразуем (20) к виду легче поддающемуся графическому построению

$$E_n = -\frac{16 A_0}{w^4} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{w^3}{32 A_0} \right)^2 + \frac{w^4}{64 A_0} + U_0 \quad (21)$$

Потенциальная яма нелинейного осциллятора при значениях параметров $A_0 = 0,01, w = 2, |q| = r$ изображена на рисунке.

Заключение

Методами нелинейной квантовой физики найден новый объект квантовой механики, являющийся решением стационарного уравнения Шредингера. Есть основания полагать, что этот объект является многомерным, то есть при других значениях параметров потенциальной энергии, являющейся полиномом 4 порядка, новые потенциальные ямы могут появиться в дополнение к введённой на рисунке. С точки зрения квантовой механики это будут новые физические объекты, статус которых в природе пока что неясен. «Бутылочка» рисунок широко применяется для описания свойств вакуума теории поля уже сегодня, как и линейное решение для осциллятора [2, 3]. Остаётся ждать вердикта эксперимента по поводу существования в природе этих новых существенно квантовых объектов.

Список литературы

1. Infeld L., Hall T.E. The factorization method // Reviews of modern Physics. – 1954. – Vol. 23, N 1. – p. 21-69.
2. Гришкан Ю.С. Усольцев О.А. // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – N 2. – С. 186-188.
3. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. – М: Мир, 1974. – С. 1-338.