УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЕТЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Немеребаев М., Рахманова Ж.С., Немеребаева А.

Таразский инновационно-гуманитарный университет Республики Казахстан, Тараз, e-mail: nemerebayev@mail.ru

Рассматривается динамическая устойчивость и изучаются колебательные режимы возникающие при потере устойчивости сетчатой оболочки из композиционных материалов. Исследование производится на основе динамических уравнений сетчатой оболочки из композиционных материалов, составленных с учетом углов расположения стержней в теле оболочек. В результате решения задачи определяются границы колебательной неустойчивости сетчатой оболочки от угла.

Ключевые слова: устойчивость, оболочка, динамика, функция, задача

DYNAMIC STABILITY OF THE MESH SHELL FROM COMPOSITE MATERIALS

Nemerebayev M., Rakhmanova Z.S., Nemerebayeva A.M.

Taraz Innovative Humanitarian University Taraz, Republic of Kazakhstan, e-mail: nemerebayev@mail.ru

The dynamic stability and the vibration modes arising when buckling mesh shells made of composite materials are study in this article. The study is based on dynamic equations of lattice shells made of composite materials made up, taking into account the location of the rods in the corners of the mesh shells . In solving the problem defined by the boundaries of the mesh shell of the vibration instability of the angle.

Keywords: stability, shell, dynamics, function, task

Большое практическое значение имеет расчет колебаний оболочек в случае, когда сжимающая осевая сила представляет собой периодическую функцию по времени. Возникающие при этом поперечные колебания являются параметрическими, они имеют своеобразные черты, существенно отличающие их от обычных вынужденных колебаний оболочек, они могут быть динамически устойчивыми или неустойчивыми [1, 2].

В данной работе рассмотрена следующая задача: пусть сетчатой оболочки из композиционных материалов нагружена периодически изменяющимися тангенциональными силами с малыми амплитудами, приложенными в срединной поверхности. В этом случае, при определенных соотношениях между частотой собственных колебаний, начальная форма оболочки становится динамически неустойчивой.

Ставится цель приближенно определить границу первой области неустойчивости оболочки тетрагональной структуры. Для простоты, как в [3], предположим, что начальное напряженное состояние является безмоментным и характеризуется тангенциальной силой $N^0_\propto$.

Тангенциональные силы инерции, силу инерции вращения и деформацию поперечных сдвигов в расчетах не учитываем. На основе вышеизложенного из [4] с учетом $N^0_\propto$ получим

$$L_2\left(A_{ik}\right)\varphi+\nabla_R\omega=0, \tag{1}$$

$$L_1\left(C_{ik}\right)\varphi-\nabla_R\varphi+N^0_\alpha\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}+\frac{2h\delta}{t}\rho\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=0,$$

где

$$L_2\left(A_{ik}\right)=A_{22}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+\left(2A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+A_{11}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4};$$

$$L_1\left(C_{ik}\right)=C_{11}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+6C_{12}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+C_{22}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}; \tag{2}$$

$$\nabla_R=\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2};$$

Для решения системы (1) применяем вариационный метод. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} L_2\left(A_{ik}\right)\varphi + \nabla_R \omega \delta\varphi d\alpha d\beta = 0;$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[L_1\left(C_{ik}\right)\omega - \nabla_R \varphi + N_\alpha^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{2\rho h \partial^2 \omega}{a \partial t^2} \right] \delta\omega d\alpha d\beta = 0. \quad (3)$$

Решением этой системы является:

$$\varphi(\alpha,\beta,T) = \Phi_{mn}(t)\varphi_{mn}(\alpha,\beta);$$

$$\omega(\alpha,\beta,t) = F_{mn}(t)\omega_{mn}(\alpha,\beta). \quad (4)$$

$\varphi_{mn}(\alpha,\beta)$ и $\omega_{mn}(\alpha,\beta)$ представим в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента и может быть представлена в виде линейных комбинаций фундаментальных функций поперечных колебаний балок, заведомо удовлетворяющих только двум граничным условиям на каждом краю оболочки.

$$\varphi_{mn}(\alpha,\beta) = X_m(\alpha)Y_n(\beta);$$

$$\omega_{mn}(\alpha,\beta) = U_m(\alpha)V_n(\beta). \quad (5)$$

Выразим решение (4) в следующем виде:

$$\delta\varphi = \varphi_{mn}\delta\Phi_{mn};\ \delta\omega = \omega_{mn}\delta F_{mn}. \quad (6)$$

Вариации коэффициентов Φ_{mn} и F_{mn}, являющихся функциями лишь времени (t) произвольны и не связаны между собой. Используя произвольность вариации $\delta\Phi_{mn}$ и δF_{mn}, а также ортогональность фундаментальных функций

$X_m(\alpha), Y_n(\beta)$, $U_m(\alpha)$ и $V_n(\beta)$ согласно (3), (4) и (6) получим следующую систему уравнений:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[\Phi_{mn} L_2\left(A_{ik}\right)\varphi_{mn} + F_{mn}\nabla_R \omega_{mn} \right] \Phi_{mn} d\alpha d\beta = 0;$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[F_{mn} L_1\left(C_{ik}\right)\omega_{mn} + \Phi_{mn}\nabla_R \varphi_{mn} + F_{mn} N_\alpha^0 \frac{\partial^2 \omega_{mn}}{\partial \alpha^2} + \frac{2h\delta\rho}{a}\frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial t^2} \right] \omega_{mn} \partial\alpha\partial\beta 0. \quad (7)$$

где m=1,2,3; n=1,2,3

Подставля значения φ_{mn} и ω_{mn} из (5) в систему (7) и вычисля соответствующие интегралы, получим систему уравнений относительно функции $\Phi_{mn}(t)$ и $F_{mn}(t)$. Затем, исключив из системы $\Phi_{mn}(t)$ получим следующее уравнение, относительно $F_{mn}(t)$:

$$\frac{d^2 F_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{N_\alpha^0}{N_{\alpha mn}^0} \right) F_{mn} = 0. \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:
для квадрата частот собственных колебаний оболочек

$$\omega^2 = \frac{T_1 T_1^/ + T_2 T_2^/}{\frac{2h\delta\rho}{a} T_1 T_6}; \quad (9)$$

для критических значений тангенциальной силы при ее независимом статическом действии

$$N'_{\alpha} = \frac{T_1 T'_1 + T_2 T'_2}{T_1 T_4}; \tag{10}$$

$$T_1 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[A_{22} \frac{\partial^4 X_m}{\partial \alpha^4} Y_n + \left(2A_{12} + A_{66}\right) \frac{\partial^2 X_m}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \beta^2} + A_{11} \frac{\partial^4 Y_n}{\partial \beta^4} X_m \right] X_m Y_n \partial\alpha \partial\beta; \tag{11}$$

$$T'_1 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[C_{11} \frac{\partial^4 U_{mn}}{\partial \alpha^4} + 6C_{12} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \beta^2} + C_{22} \frac{\partial^4 V_n}{\partial \beta^4} U_m \right] U_{mn} V_n \partial\alpha \partial\beta; \tag{12}$$

$$T_2 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 X_m}{\partial \alpha^2} Y_n \right) U_m V_n \partial\alpha \partial\beta\ ); \tag{13}$$

$$T'_2 = -\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 X_m}{\partial \alpha^2} Y_n \right) U_m V_n \partial\alpha \partial\beta; \tag{14}$$

$$T_4 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \alpha^2} U_m V_n^2 \partial\alpha \partial\beta; \tag{15}$$

$$T_6 = \frac{2h\delta\rho}{a} \int_0^L \int_0^{2\pi R} U_m^2 V_n^2 \partial\alpha \partial\beta; \tag{16}$$

Пусть оболочка шарнирного оперта. Тогда граничные условия имеют вид:

$$\alpha = 0,\ \ \omega_0 = 0,\ M_1 = 0,\ N_{\alpha} = 0,\ V = 0\ . \tag{17}$$

В этом случае, полагая

$$X_m = U_m = \sin\frac{m\pi\alpha}{\lambda},\ Y_n = V_n = \sin\frac{\pi}{R}\beta,\ k = \frac{\pi m}{\lambda},\ \frac{n}{R} = \gamma_2 \tag{18}$$

из (9) и (10) согласно (11)–(16) и (18), получим для коэффициентов уравнения (8) следующие выражения

$$\omega_{mn}^2 = \frac{a}{2h\delta\rho} \left[\frac{\left(\frac{1}{R} k^2 \right)^2}{D'} + D \right]; \tag{19}$$

$$N'_{\alpha mn} = \frac{1}{\lambda_2^2} \left[\frac{\left(\frac{1}{R} k^2 \right)^2}{D'} + D \right], \tag{20}$$

где

$$D = C_{11} k^4 + 6C_{12} k^2 \lambda_2^2 + C_{22} \lambda_2^4; \tag{21}$$

$$D' = A_{22} k^4 + \left(2A_{12} + A_{66}\right) k \lambda_2^2 + A_{11} \lambda_2^4;$$

Принимая

$$N_{\alpha}^{0}=\frac{1}{2\pi R}P_{0}+P_{0}\cos\theta t,$$

получим из уравнения динамической устойчивости уравнение параметрических колебаний:

$$\frac{d^{2}F}{dt^{2}}=\Omega^{2}\left(1-2\mu\cos\theta t\right)F, \tag{22}$$

где

$$\Omega^{2}=\omega^{2}\left(1-\frac{P_{0}}{P_{кр}^{/}}\right),\ \mu=\frac{1}{2}\frac{P_{t}}{P_{кр}^{/}-P_{0}},\ P_{кр}^{/}=\frac{2\pi R}{k^{2}}\xi;$$

$$\xi=C_{11}k^{4}+6C_{12}k^{2}\lambda^{2}+C_{22}\lambda_{2}^{4}+\frac{k^{4}}{R^{2}}\left[A_{22}k^{4}+2\left(A_{11}+A_{66}\right)k^{2}\lambda_{2}^{2}+A_{11}\lambda_{2}^{4}\right]^{-1}.$$

Рассмотрим решение задачи с учетом силы сопротивления. Для этого положим, что сила сопротивления является линейной функцией скорости перемещения, с коэффициентом линейного затухания ε. Перепишем уравнение (22) следующим образом

$$\frac{d^{2}F}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{dF}{dt}+\Omega^{2}\left(1-2\mu\cos\theta t\right)F=0. \tag{23}$$

Формула определения границ главной области неустойчивости можно представить в виде [1,3]

$$\Delta_{k1}^{2}=4\Omega^{2}\left[1-\left(\mu^{2}-\frac{4\varepsilon^{2}}{\Omega^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right];\Delta_{k2}^{2}=4\Omega^{2}\left[1+\left(\mu^{2}+\frac{4\varepsilon^{2}}{\Omega^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что при симметрической форме потери устойчивости n=0, а критическая частота Δ_{k} принимает минимальное значение при

$$k^{2}=\frac{P+2P_{0}}{8\pi RC_{11}}. \tag{25}$$

Тогда верхняя и нижняя границы неустойчивости (при ε=0) имеет вид:

$$\Delta_{k1}^{2}=\frac{2a}{h\delta\rho R^{2}}\left[\frac{1}{A_{22}}-\frac{\left(P+2P_{0}\right)^{2}}{64\pi^{2}C_{11}}\right];$$

$$\Delta_{k2}^{2}=\frac{2a}{h\delta\rho R^{2}}\left[\frac{1}{A_{22}}+\frac{3\left(P+2P_{0}\right)^{2}}{64\pi^{2}C_{11}}\right], \tag{26}$$

где согласно [4]

$$A_{22}=\frac{B_{11}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^{2}}\quad C_{11}=\frac{2}{a}EI_{y}\left(\cos\varphi\right)^{4};$$

$$B_{11}=\frac{2}{a}\left[EF\left(\cos\varphi\right)^{4}+\frac{12EI_{z}}{l^{2}}\left(\sin\varphi\right)^{2}\left(\cos\varphi\right)^{2}\right]; \tag{27}$$

$$B_{12}=\frac{2}{a}\left[EF-\frac{12EI_{z}}{l^{2}}\right]\left(\sin\varphi\right)^{2}\left(\cos\varphi\right)^{2};$$

$$B_{22} = \frac{2}{a}\left[EF\left(\sin\varphi\right)^4 + \frac{12EI_z}{l^2}\left(\sin\varphi\right)^2\left(\cos\varphi\right)^2\right].$$

Принимая во внимание (27) и проводя несложные приобразования перепишем формулу (26) в виде:

$$\Delta_{k1}^2 \frac{\rho R^2}{Ea^2} = \left[\frac{\delta^2 h^2\left(\sin\varphi\right)^4}{l^4\left(1+\frac{4\delta^2}{a^2}\left(\sin\varphi\right)^4\right)} - \frac{3}{16\pi^2\left(\cos\varphi\right)^4}\right];$$

$$\Delta_{k2}^2 \frac{\rho R^2}{Ea^2} = \left[\frac{\delta^2 h^2\left(\sin\varphi\right)^4}{l^4\left(1+\frac{4\delta^2}{a^2}\left(\sin\varphi\right)^4\right)} + \frac{8}{16\pi^2\left(\cos\varphi\right)^4}\right]. \qquad (28)$$

Здесь принято: $P_0 = 0, \quad P = Eh\delta$.

Проведенный численный анализ показывает, что :

• Минимальные значения ширины зоны устойчивости находятся в окрестностях φ=0. Вблизи угла $\varphi = \frac{\pi}{3}$ происходит бурное возрастание критических частот, а в окрестностях $\varphi = \frac{\pi}{2}$ происходит разрыв критических частот. Это объясняется тем, что полученое решение (28) имеет особенность при углах φ=0 и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

• Оболочка с углом φ=0 представляет собой систему продольных ребер. В том случае, как видно из (27), $B_{12} = 0$, $B_{22} = 0$. При этом получим известные выражения, определяющие динамическую устойчивость шарнирно закрепленного стержня [2].

• Оболочка с углом $\varphi = \frac{\pi}{2}$ вырождается в систему колец, которые не воспринимают осевую периодическую нагрузку.

Список литературы

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961.

2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967.

3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М., 1974.

4. Немеребаев М., Бекмуратов М.М., Немеребаева А. Параметрические колебания сетчатой оболочки из композиционных материалов // IX Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы науки XXI века» (30.04.2016 г.). Ч 3. – М., 2016. – С.22–27.