

УДК 532.526:533.6.011.55

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗВИТИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В РАМКАХ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Терехова Н.М.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, e-mail: terekh@itam.nsc.ru*

В рамках слабонелинейной теории устойчивости рассмотрено взаимодействие естественных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое при умеренном числе Маха $M = 2$ на непроницаемой теплоизолированной поверхности. Исследуется первый уровень нелинейного взаимодействия – в трехволновых резонансных системах (триадах). Изучается групповое взаимодействие (совместная реализация нескольких простых триплетов). Возмущения представлены широким спектром частот с неизвестным азимутальным составом вихревых волн неустойчивости. Изучена возможность перераспределения энергии в таких системах при реализации нелинейного взаимодействия компонент, в рамках резонансных связей. Модель предназначена для тестирования динамики естественных неустойчивых волн, регистрируемых на амплитудно-частотных спектрах экспериментальными методами. Показано, что резонансные взаимодействия адекватны реальным процессам на ранних стадиях перехода, но требуется уточнение азимутального состава частотных компонент.

Ключевые слова: сверхзвуковой пограничный слой, трехволновые резонансные системы, естественные вихревые возмущения

THE SIMULATION OF NONLINEAR DEVELOPMENT OF NATURAL DISTURBANCES IN THE SUPERSONIC BOUNDARY LAYER IN THE FRAMEWORK OF THE WEAKLY NONLINEAR STABILITY THEORY

Terekhova N.M.

*Khristianovich's Institute of theoretical and applied mechanics SB RAS, Novosibirsk,
e-mail: terekh@itam.nsc.ru*

In the framework of the weakly nonlinear stability theory considers the interaction of natural disturbances in a supersonic boundary layer on an impermeable insulated surface. The first level of nonlinear interaction is investigated in three-wave resonance systems. We study group interaction (joint realization of several simple triplets). The disturbance represented a wide range of frequencies with the unknown azimuthal composition of the vortex unstable waves. The possibility of energy redistribution in such systems is realized in the course of realization of the nonlinear interaction of components, within the framework of resonance bonds. The model is designed to test the dynamics of natural unstable waves recorded on the amplitude-frequency spectra by experimental methods. It is shown that resonance interactions are adequate to real processes in the early stages of the transition, but it is required to refine the azimuthal composition of the frequency components.

Keywords: supersonic boundary layer, three-wave resonant system, the vortex disturbances

Накопленный к настоящему времени экспериментальный материал по изучению ранней стадии перехода от ламинарного к турбулентному режимам обтекания стимулирует создание новых и применение уже имеющихся методов математического моделирования этого важного этапа потери устойчивости сверхзвукового потока. В последние годы проводится углубленное изучение ряда методов эволюции возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях сжимаемого газа. Эти работы можно разделить на две группы. В первой группе развиваются методы прямого численного моделирования систем уравнений в частных производных. Во второй расчеты проводятся в рамках традиционного метода возмущений, сводящегося к решению систем обыкновенных дифференциальных урав-

нений для средних характеристик и малых возмущений. Далее применяются положения слабонелинейной теории устойчивости, и исследования проходят на основе модельного подхода изучения взаимодействия в трехволновых системах (триплетях). Физическое обоснование такого моделирования заключается в изучении эволюции одной волны в силовом поле двух других волн, проходящее в условиях синхронизации их фаз.

Амплитудные уравнения для таких трехволновых систем получены при использовании стандартной процедуры осреднения и условия разрешимости [1].

Связь теории и эксперимента проходила в тесном сотрудничестве расчетной группы с исследовательским коллективом экспериментаторов, работающих на сверхзвуковой

малотурбулентной аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН, где уже длительное время изучают состав и продольную динамику как вводимых искусственно (контролируемых), так и естественных возмущений [2].

К настоящему времени первый раздел достаточно изучен – при невысоком начальном уровне возмущений реализуется субгармоническая неустойчивость, закономерности которой качественно и количественно описываются нелинейной моделью взаимодействия в резонансных триадах [1]. В отличие от первого, раздел изучения динамики естественных возмущений значительно менее популярен и соответственно – исследован.

В настоящее время четко установлено, что динамика развития естественных возмущений отличается от динамики развития контролируемых. Для них фиксируется широкий спектр частот при полном отсутствии данных об азимутальном составе компонент спектра, а перераспределение энергии осуществляется не только в субгармоническую область, но и в область высоких частот (обертонов). В этих условиях наряду с рассмотрением синхронизированных частотных триплетов возникает необходимость удовлетворить условиям фазового синхронизма и по азимутальным волновым числам.

Работа проведена в два этапа. Предварительно была подробно изучена принципиальная возможность моделирования взаимодействия в триплетах естественных возмущений произвольного азимутального состава. На втором этапе последовательно изучены взаимодействия в так называемых групповых триплетах, составленных из нескольких простых. В окончательном варианте, который представлен в данной работе, задействовано 12 синхронизированных частот, общее число простых триплетов, входящих в групповую, равнялось 36. Моделировались два набора синхронизированных азимутальных чисел, в которых основными несущими компонентами являются трехмерные волны, имеющие максимальные инкременты внутри нейтральной кривой при начальных числах Рейнольдса $Re = 300$ и 600 .

Параметры [2] являлись отправными при расчетах – рассмотрен пограничный слой на непроницаемой теплоизолированной пластине под нулевым углом атаки при числе Маха $M = 2$, $\gamma = 1,4$, температуре торможения 310 К, числе Прандтля $\sigma = 0,72$ и единичном числе Рейнольдса $Re_1 = 12,5 \times 10^6 m^{-1}$. Интервал продольных чисел Рейнольдса соответствовал экспери-

ментальному, введено расчетное число Рейнольдса $Re = \sqrt{R_x}$.

Основные соотношения и методы решения

Основные положения нелинейной модели взаимодействия возмущений в трехволновых резонансных системах в пограничных слоях сжимаемого газа подробно изложены в [1]. Необходимо перечислить основные положения используемого метода возмущений. Рассматривается возмущенное поле скоростей $\bar{u} = |U(Y) + \epsilon u', \epsilon v', \epsilon w'|$, плотности $\bar{\rho} = \rho(Y) + \epsilon \rho'$, давления $\bar{p} = P(Y) + \epsilon p'$ и температуры \bar{T} сжимаемого газа, $p'/P = \zeta'/\rho + \Theta'/T$ в безразмерных координатах $(X, Y, Z) = (x, y, z)/\delta$ ($\delta = \sqrt{v_e x / U_e}$ – характерный линейный масштаб). Здесь ϵ – масштаб пульсационного поля ($\epsilon \ll 1$); e – индекс параметров на внешней границе; величины со штрихами и без штрихов – пульсационные и средние величины). Решение строится с помощью двухмасштабного разложения продольной координаты, вводятся «быстрый» и «медленный» масштабы (X и $\xi = \epsilon X$), характеризующие разницу скоростей изменения фазы и амплитуды возмущений.

Решения для волн записываются в виде суперпозиции линейных компонент и составляющих более высокого порядка

$$\bar{Z}'_j = A_j(\xi) \bar{Z}_j^0(Y) \exp(i\theta_j) + \text{к.с.} + \epsilon (\bar{Z}'_j)^1 + \dots, \\ j = 1, 2, 3,$$

где $\bar{Z} = |u, v, w, p, \Theta|$, A – медленно меняющаяся амплитуда; к.с. – комплексно-сопряженные величины; $\theta = \alpha X + \beta Z - \omega t$; $\alpha = \alpha' + i\alpha^i$; $\alpha^i < 0$ – инкремент; частота $\omega = 2\pi f$ – вещественная величина; волновые числа α, β и частота связаны дисперсионным соотношением $\alpha = \alpha(\omega, \beta)$ линейной теории.

Краевые условия для возмущений – условия прилипания $\{u, v, w, \Theta\} = 0$ при $Y = 0$, и условия ограниченности $\{u, v, w, \Theta\} \rightarrow 0$ при $Y \rightarrow \infty$. Для возмущений первого порядка из так называемой системы Дана – Линя [1] находятся собственные значения α при заданных β, ω и Re , а также собственные амплитудные функции линейных волн (1).

Во втором порядке по ϵ согласно слабонелинейной теории, используя высшие гармоники (1), определяют амплитуду волн A . В основе резонансной модели лежит процесс попарного взаимодействия волн в поле третьей волны в условиях синхронизации их фаз $\theta_j = \theta_k + \theta_l$. Для простой трехволновой системы j, k, l волн амплитудные уравнения имеют вид

$$dA_j / d\xi = -\alpha_j^i A_j + S_{k,l}^j A_k A_l \exp(i\Delta),$$

...

$$S_{k,l}^j = \int_0^{Y_k} \bar{Z}_j^{0+} \bar{Q}_{k,l}^j dY / \int_0^{Y_k} \bar{Z}_j^{0+} (\partial L(\bar{Z}_j^0) / \partial \alpha_j) dY, \Delta = \int (\alpha_k + \alpha_l - \alpha_j)^r dX,$$

где Δ – коэффициент фазовой синхронизации; \bar{Z}^{0+} – решения сопряженных к системе Дана – Линя уравнений, Q – нелинейные члены. Начальные значения амплитуд A задавались через начальные интенсивности I волновых компонент. Вводились безразмерные частотный параметр F ($\omega = \text{Re}F$) и азимутальное волновое число $b = 10^3 \beta / \text{Re}$. Рассматривались 3D (трехмерные) волны с $b \neq 0$.

Результаты исследования и их обсуждение

Приведем амплитудно-частотные спектры естественных возмущений, полученных в Т-325 экспериментальной группой (А.Д. Косинов, Н.В. Семенов, Ю.Г. Ермолаев). Спектры получены для разных диапазонов частот в широкой полосе Re . Они характеризуются отсутствием ярко выраженных преобладающих компонент, более высокими начальными амплитудами низкочастотных составляющих и преобладаю-

щим ростом высокочастотных компонент вниз по потоку. Диапазон применимости слабонелинейного приближения оценивается $600 < \text{Re} < 900$. При моделировании динамики естественных возмущений были рассмотрены два частотных диапазона. Узкий диапазон частот охватывал полосу ($2,5 \leq f \leq 30$) кГц с шагом $\Delta f = 2,5$ кГц. Это соответствовало безразмерным частотным параметрам ($0,048 < F < 0,576$) 10–4.

Большой диапазон ($5 \leq f \leq 60$) кГц ($0,096 < F < 1,152$) 10–4 пройден с шагом $\Delta f = 5$ кГц.

Второй крайне важной особенностью являлась необходимость синхронизовать в триплетах не только частоты ω , но и азимутальные волновые числа β , при полном отсутствии данных об их реальных значениях. Для синхронизации по β необходимо решать алгебраическую систему на совместность. При этом возникает один свободный азимутальный номер, через который определяются остальные.

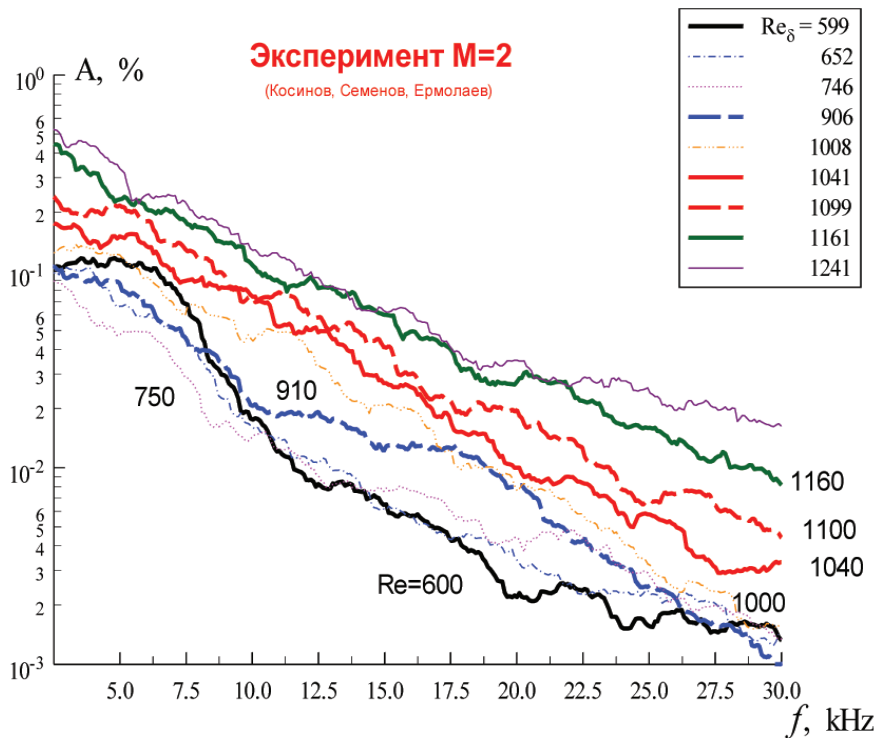


Рис. 1. Эволюция естественных возмущений узкого диапазона частот

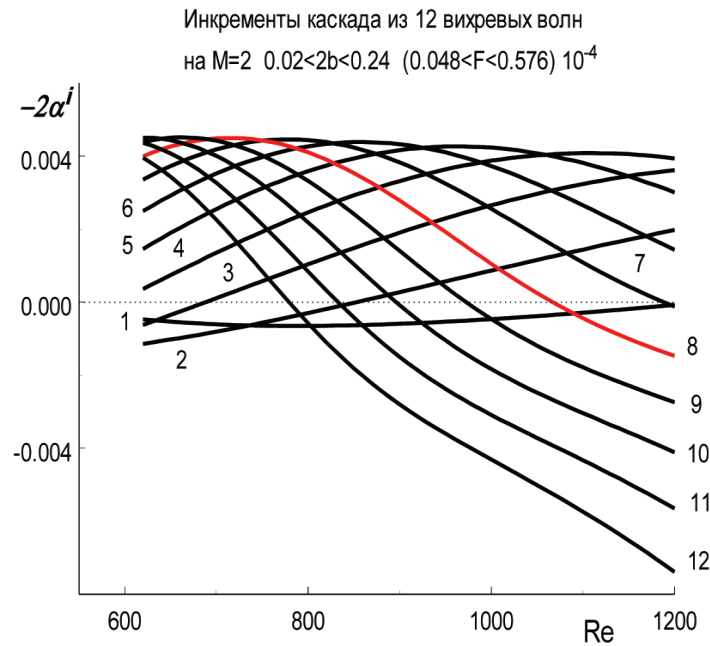


Рис. 2. Примеры выбора несущих азимутальных волновых чисел по значениям инкрементов в широком диапазоне Re

Комбинации частот и волновых чисел, признанных оптимальными

	$10^4 F$	b	f кГц		$10^4 F$	b	f кГц		$10^4 F$	b	f кГц
1	0,048	0,02	2,5	2	0,096	0,04	5	3	0,144	0,06	7,5
4	0,192	0,08	10	5	0,240	0,10	12,5	6	0,288	0,12	15
7	0,336	0,14	17,5	8	0,384	0,16	20	9	0,432	0,18	22,5
10	0,480	0,20	25	11	0,528	0,22	27,5	12	0,576	0,24	30

Такой определяющей компонентой выбрана волна на частоте $f = 20$ кГц с азимутальным волновым числом $2b = 0,16$. В процессе расчета моделировалось также несколько других вариантов. В представленной таблице показаны комбинации частот и волновых чисел, признанных оптимальными, а на рис. 2 показаны инкременты этих компонент при Re .

На рис. 3 показано сравнение результатов моделирования и экспериментальных данных в слабонелинейной области для двух вариантов начальных значений интенсивности разных компонент. Результаты оказались в достаточной степени близки друг другу и экспериментальным данным (Косинов, Семенов, Ермолаев), что свидетельствует об адекватности рассматриваемой модели истинному процессу эволюции естественных вихревых возмущений при умеренном сверхзвуковом числе Маха $M = 2$.

Полные распределения спектров для всех чисел Рейнольдса показаны на рис. 4. Качественное сопоставление этих расчет-

ных спектров можно сделать с данными рис. 1.

На рис. 5 показаны спектры узкого диапазона частот при другом выборе несущей частоты (не 20, а 15 кГц). Как видно из сравнения рис. 3 и 5, такая перенормировка не слишком сказывается на характере продольной динамики спектральных компонент – по-прежнему сильнее растут высокочастотные компоненты и следует ожидать, что при больших Re картины станут адекватны.

Определенные усилия были предприняты для понимания того, каким образом формируется в эксперименте начальный спектр при $Re = 600$. Для этого расчеты были перенесены в более устойчивую область при низком $Re_0 \sim 300$, и изучалась продольная динамика возмущений при разных начальных интенсивностях в Re_0 . Было рассмотрено несколько вариантов разных комбинаций:

- a. $I(F, b, Re_0) = \text{const}$,
- в. $I(F, b) = \exp(-\alpha^i Re_0)$,
- с. $I(F_{12}, b_1) = 10^k, (F_{12}, b_{12}) = 10^{k-1}$,
- d. различные комбинации a–с.

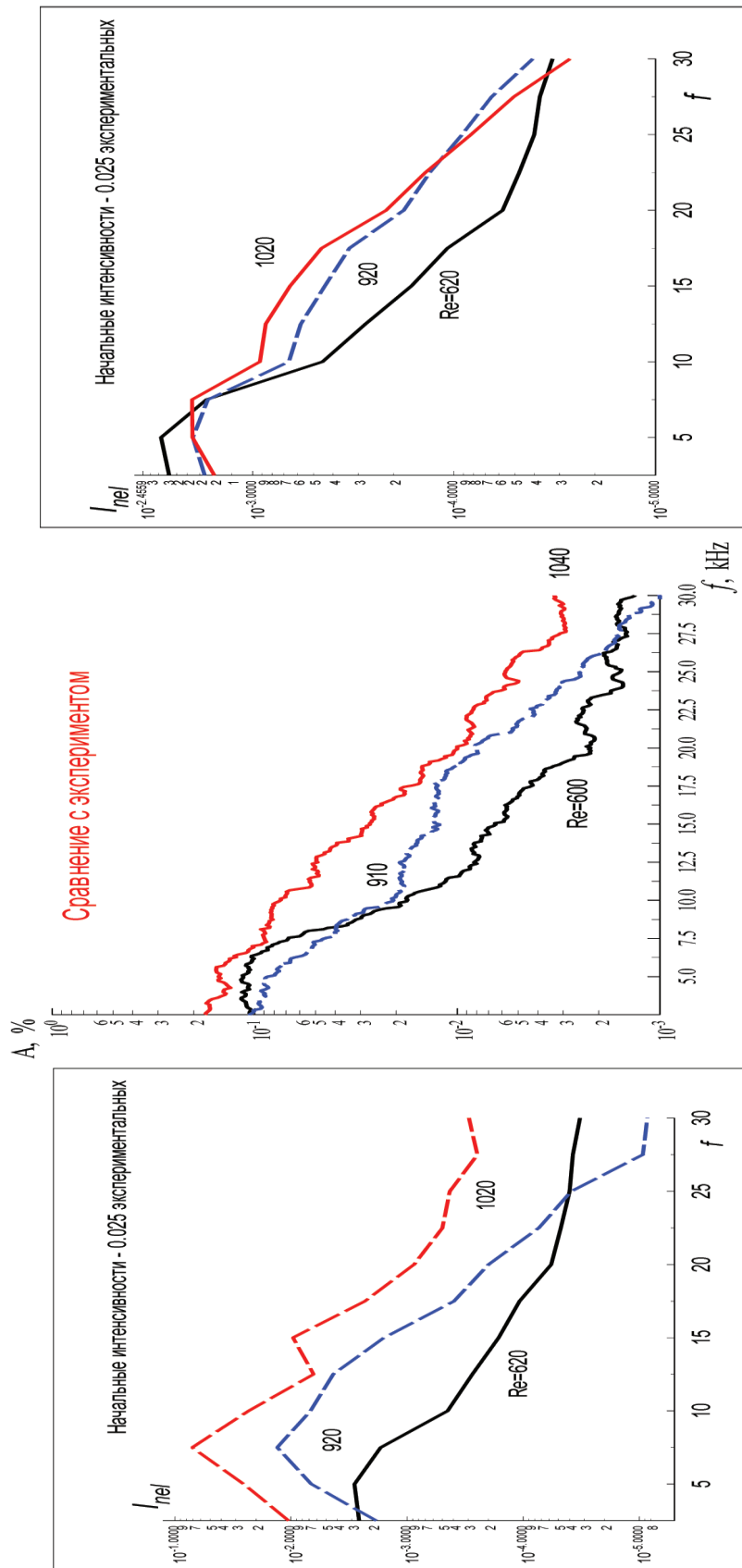


Рис. 3. Результаты моделирования (левая и правая картинки) в сравнении с экспериментом (центр)

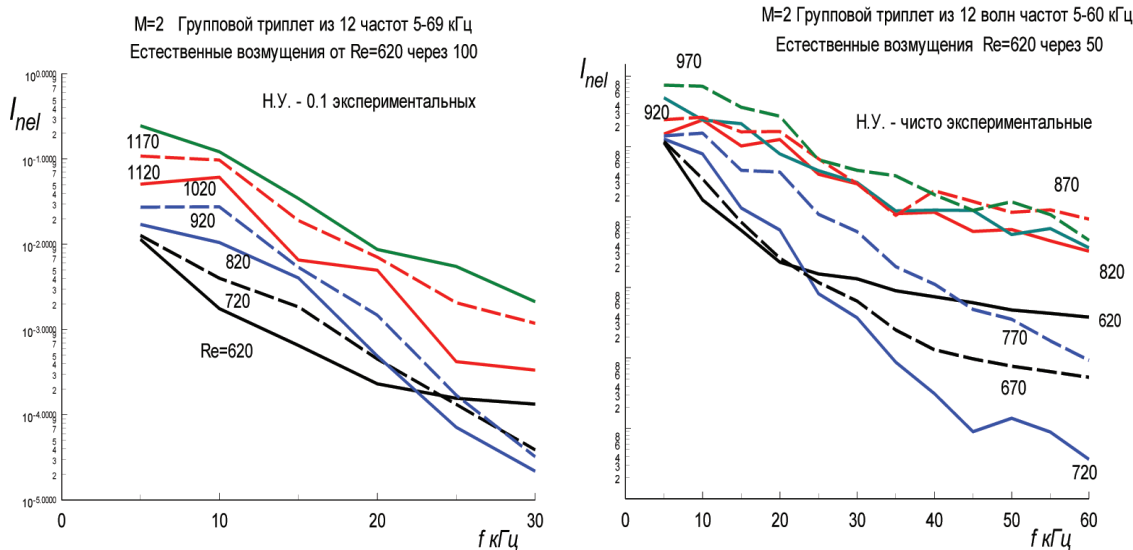


Рис. 4. Расчетные амплитуд естественных возмущений в нелинейной области эволюции на $M = 2$ для двух диапазонов частот

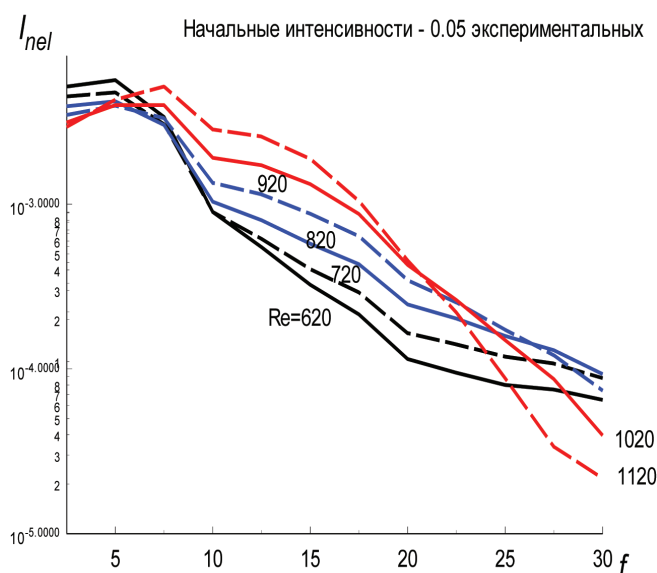


Рис. 5. Расчетные амплитуд естественных возмущений в нелинейной области эволюции на $M = 2$ при другой несущей частоте

Поставленная цель не была достигнута, и вопрос так и остается вопросом, ждущим исследования. В целом можно констатировать, что, хотя рассмотренная модель взаимодействия возмущений в рамках трехволновых резонансных систем является первым шагом в описании динамики естественных волн в слабнонелинейной области развития и сильным упрощением реальных нелинейных процессов, она отражает ряд важных особенностей и адекватна истинному процессу. Конечно, в дальнейшем эксперименты должны дать ряд более точных определяющих параметров, кото-

рые позволят приблизить моделирование к реальному процессу.

Работа поддержана РФФИ (код проекта № 15-01-00866а).

Список литературы

1. Гапонов С.А., Масленникова И.И. Субгармоническая неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Теплофизика и аэромеханика. – 1997. – Т. 4, № 1. – С. 3–12.
2. Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В. Характерные особенности слабнонелинейного взаимодействия волн неустойчивости в сверхзвуковом пограничном слое // Вестник НГУ. Серия: Физика. – 2008. – Т. 3. Вып. 3. – С. 3–13.
3. Гапонов С.А., Терехова Н.М. Трехволновые взаимодействия контролируемых возмущений в сверхзвуковом пограничном // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 6–5. – С. 833–838.