УДК 51–7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

[1]Распутина Е.И., [2]Осипов Г.С.

[1]Государственный университет морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, e-mail: rasputinka.el@mail.ru;

[2]Сахалинский государственный университет, Южно-Сахалинск, e-mail: _Osipov@rambler.ru;

Проведено качественное исследование классической модели «хищник-жертва», осуществлена классификация особой точки системы и характера фазовых траекторий, получен общий интеграл системы. Приводятся математические модели динамики популяций с учетом эффекта насыщения их плотности на базе логистических функций. Получены формальные зависимости для определения собственных чисел характеристического уравнения, определяющие параметры поведения системы при отклонении от стационарного режима. Осуществлен синтез модели и проведен полный математический анализ влияния трофических функций на параметры взаимодействия популяций. Предложена унифицированная методика проведения исследования и классификации особых точек систем и их фазовых траекторий. Получены условия, определяющие параметры устойчивости исследуемых моделей популяционной динамики. Выполнено имитационное моделирования неклассической модели взаимодействия популяций в среде AnyLogic.

Ключевые слова: популяционная динамика, математическая модель, имитационное моделирование

MATHEMATICAL MODELING AND SIMULATION DYNAMICS OF POPULATIONS

[1]Rasputina E.I., [2]Osipov G.S.

[1]Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St. Petersburg, e-mail: rasputinka.el@mail.ru;

[2]Sakhalin State University, Yuzhno-Sakhalinsk, e-mail: _Osipov@rambler.ru

A qualitative study of the classical model of the «predator-prey», we classify the singular point of the system and the nature of the phase trajectories, obtained the general integral of the system. Mathematical models of population dynamics, taking into account the saturation effect of density based on logistic functions. Obtained according to the formal definition for the eigenvalues of the characteristic equation, which determines the behavior of the system parameters when a deviation from the steady state. The synthesis model and carried out a complete mathematical analysis of the effect of trophic functions of the parameters of the interaction of populations. A unified methodology of the study and classification of singular points of the systems and their phase trajectories. The conditions that determine the stability of the parameters investigated models of population dynamics. Achieved simulation modeling populations of non-classical model of interaction in AnyLogic environment

Keywords: population dynamics, mathematical model, simulation

Современный этап научного мировоззрения характерен синергетическим эффектом развития, достигаемым за счет проникновения методологий исследований, характерных для определенных отраслей научных знаний в смежные. Такой подход к познанию экосферы приводит к взаимному и одновременному обогащению используемых классических основ отдельных научных направлений, что может являться гарантом уменьшения или оптимизации воздействия техносферных изменений, инициируемых человеческой деятельностью, на общую среду обитания.

Популяционная динамика – один из разделов математического моделирования, который благодаря универсальности своего подхода и используемого математического аппарата широко используется при решении практически и социально значимых задач математической экологии, демографии и экономики. Основная цель исследований динамики популяций состоит в анализе и прогнозировании численности и плотности взаимодействующих популяций на определенном ареале.

Настоящее исследование посвящено комплексному анализу проблем поведения взаимодействующих популяций с позиций математического и имитационного моделирования.

Материалы и методы исследования

Проведем краткий качественный анализ классической модели «хищник-жертва» [1].

Рассматривается закрытый ареал, в котором обитают жертвы x и хищники y. Взаимодействие популяций описываются системой двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_x x - q_x yx \\ \dot{y} = k_y xy - q_y y \end{cases}, \qquad (1)$$

где $x = x(t),\ y = y(t)$ – функции изменения плотностей особей жертв и хищников во времени t; k_x, q_y – мальтузианские параметры; q_x, k_y – коэффициенты межвидового взаимодействия.

Правые части системы (1) обращаются в ноль в точке

$$O\left(x_0, y_0\right) = O\left(\frac{q_y}{k_y}, \frac{k_x}{q_x}\right).$$

В малой окрестности этой точки при $x = x_0 + \tilde{x}$ и $y = y_0 + \tilde{y}$ получим:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\dfrac{q_x q_y}{k_y}\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = \dfrac{k_x k_y}{q_x}\tilde{x} \end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, точка $O\left(x_0; y_0\right)$ является невырожденной особой точкой типа «центр», все фазовые траектории системы образуют циклы, а общий интеграл находится так:

$$y^{k_x} e^{-q_x y} e^{-k_y x} x^{q_y} = C.$$

В соответствии с системой (2) колебания плотности популяций будут осуществляться по закону

$$f\left(t\right) = A\sin\left(\sqrt{k_x q_y}\, t + \varphi_0\right).$$

На базе модели (1) построим систему с учетом естественной ограниченности плотности популяции жертв:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_x x - q_x yx - p_x xx \\ \dot{y} = k_y xy - q_y y, \end{cases} \qquad (3)$$

где p_x – параметр внутривидовой конкуренции жертв.

В системе уравнений (3) есть невырожденная особая точка $O\left(x_0, y_0\right)$ с координатами:

$$x_0 = \frac{q_y}{k_y}; y_0 = \frac{k_x k_y - p_x q_y}{q_x k_y}.$$

Классифицируем особую точку и определим характер поведения системы при малом отклонении от этой точки, для этого сделаем подстановку

$$x = x_0 + \tilde{x}; y = y_0 + \tilde{y}$$

и получим:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -p_x x_0 \tilde{x} - q_x x_0 \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = k_y y_0 \tilde{x}. \end{cases}$$

Для данной системы составим характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda + \frac{p_x x_0}{2}\right)^2 = \frac{\left(p_x x_0\right)^2}{4} - q_x q_y y_0.$$

При выполнении условия

$$y_0 > \frac{p_x^2 q_y}{4 q_x k_y^2}$$

собственные числа будут комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p_x q_y}{2k_y} \pm \frac{1}{2k_y}\sqrt{q_y\left(4 q_x k_y^2 y_0 - p_x^2 q_y\right)}\, i.$$

Таким образом, точка $O\left(x_0, y_0\right)$ является «устойчивым фокусом», а фазовые траектории – «логарифмическими спиралями»

Дополним модель (3) логистической функцией для хищника:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_x x - q_x yx - p_x xx \\ \dot{y} = k_y xy - q_y y - p_y yy, \end{cases}$$

где p_y – параметр внутривидовой конкуренции хищников.

В данном случае невырожденной особой точкой является точка с координатами:

$$x_0 = \frac{q_y + p_y y_0}{k_y}; y_0 = \frac{k_x k_y - p_x q_y}{q_x k_y + p_x p_y}.$$

Составим систему дифференциальных уравнений для выявления характера поведения системы вблизи найденной особой точки:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -p_x x_0 \tilde{x} - q_x x_0 \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = k_y y_0 \tilde{x} - p_y y_0 \tilde{y}. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -p_x x_0 - \lambda & -q_x x_0 \\ k_y y_0 & -p_y y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \left(p_x x_0 + p_y y_0\right)\lambda + p_x p_y x_0 y_0 +$$
$$+ q_x k_y x_0 y_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\lambda + \frac{p_x x_0 + p_y y_0}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(p_x x_0 + p_y y_0\right)^2}{4} - \left(p_x p_y + q_x k_y\right) x_0 y_0.$$

Из характеристического уравнения видно, что действительная часть собственных чисел отрицательная.

Можно показать, что

$$p_x x_0 + p_y y_0 = k_x - \left(q_x - p_y\right) y_0 > 0 \Rightarrow y_0 < \frac{k_x}{q_x - p_y}.$$

Тогда характеристическое уравнение может быть записано следующим образом:

$$\left(\lambda + \frac{k_x - \left(q_x - p_y\right) y_0}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(k_x - \left(q_x - p_y\right) y_0\right)^2}{4} - \left(k_x p_y + q_x q_y\right) y_0.$$

Исходя из полученных соотношений можно получить оценку y_0 снизу при которой корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными:

$$y_0 > \frac{k_x}{q_x - p_y + 2\sqrt{k_x p_y + q_x q_y}}.$$

При выполнении такого условия корни характеристического уравнения определятся следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p_x x_0 + p_y y_0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\left(p_x q_y + q_x k_y\right)x_0 y_0 - \left(p_x x_0 + p_y y_0\right)^2}\, i.$$

Значит, особая точка является «устойчивым фокусом», а фазовые траектории – «логарифмическими спиралями»

Исследуем модель взаимодействия популяций с трофическими функциями:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_x x - \dfrac{q_x xy}{1+ax} \\ \dot{y} = \dfrac{k_y yx}{1+ax} - q_y y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{x} = k_x x + \dfrac{q_x}{a}\cdot\dfrac{y}{1+ax} - \dfrac{q_x}{a} y \\ \dot{y} = \dfrac{k_y}{a} y - \dfrac{k_y}{a}\cdot\dfrac{y}{1+ax} - q_y y \end{cases},$$

где a – параметр насыщения; k_y, q_x – коэффициент изменения численности популяций от давления хищника.

Координаты невырожденной особой точки системы будут следующими:

$$x_0 = \frac{q_y}{k_y - aq_y};\ y_0 = \frac{k_x\left(1+ax_0\right)}{q_x} = \frac{k_x k_y}{q_x\left(k_y - aq_y\right)}. \tag{4}$$

Исследуем устойчивость системы в особой точке $O\left(x_0,\, y_0\right)$ для чего перейдем к переменным

$$x = \tilde{x} + x_0,\, y = \tilde{y} + y_0.$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{1+ax}$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 сохраняя линейные члены:

$$\frac{1}{1+ax} = \frac{1}{1+ax_0} - \frac{a}{\left(1+ax_0\right)^2}\tilde{x}. \tag{5}$$

Тогда система дифференциальных уравнений для определения собственных чисел будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \dfrac{ak_x q_y}{k_y}\tilde{x} - \dfrac{q_x q_y}{k_y}\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = \dfrac{k_y y_0}{\left(1+ax_0\right)^2}\tilde{x} = \dfrac{k_x k_y}{q_x\left(1+ax_0\right)}\tilde{x}. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{ak_x q_y}{k_y} - \lambda & -\dfrac{q_x q_y}{k_y} \\ \dfrac{k_x k_y}{q_x\left(1+ax_0\right)} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{ak_x q_y}{k_y}\lambda + \frac{k_x q_y}{1+ax_0} = 0 \Rightarrow \left(\lambda - \frac{ak_x q_y}{2k_y}\right)^2 = \frac{a^2 k_x^2 q_y^2}{4k_y^2} - \frac{k_x q_y}{1+ax_0}.$$

Очевидно, действительная часть собственных чисел положительна.

Из (4) следует, что

$$\frac{k_x q_y}{1+ax_0} = \frac{k_x q_y\left(k_y - aq_y\right)}{k_y},$$

тогда можно записать условие, при котором правая часть характеристического уравнения отрицательна:

$$x_0 < \frac{4k_y}{a^2 k_x}.$$

В этом случае. собственные числа являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью:

$$\lambda_{1,2} = \frac{ak_x q_y}{2k_y} \pm \sqrt{\frac{k_x q_y}{1+ax_0} - \frac{a^2 k_x^2 q_y^2}{4k_y^2}} i.$$

Значит, особая точка является неустойчивым фокусом, фазовые траектории – логарифмические спирали

Рассмотрим неклассическую модель типа «хищник-жертва» с трофическими функциями и с функцией насыщения популяции жертв:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_x x - \dfrac{q_x yx}{1+ax} - p_x xx \\ \dot{y} = \dfrac{k_y xy}{1+ax} - q_y y. \end{cases} \tag{6}$$

Можно показать, что координаты невырожденной особой точки будут следующими:

$$x_0 = \frac{q_y}{k_y - aq_y};\ y_0 = \frac{\left(k_x - p_x x_0\right)\left(1+ax_0\right)}{q_x} = \frac{\left(k_x - p_x x_0\right)k_y}{q_x\left(k_y - aq_y\right)}$$

Следствия: $\frac{aq_y}{k_y} < 1;\ x_0 < \frac{k_x}{p_x}$.

Используя формулу (5) исследуем устойчивость системы в особой точке $\left(x_0, y_0\right)$. Получим следующую систему дифференцированных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \dfrac{ak_x q_y - p_x x_0\left(aq_y + k_y\right)}{k_y}\tilde{x} - \dfrac{q_x q_y}{k_y}\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = \dfrac{k_y}{1+ax_0}\dfrac{k_x - p_x x_o}{q_x}\tilde{x}, \end{cases}$$

характеристическое уравнение для которой:

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{ak_x q_y}{k_y} - \dfrac{k_y + aq_y}{k_y} p_x x_0\right) - \lambda & -\dfrac{q_x q_y}{k_y} \\ \dfrac{k_y}{1+ax_0}\dfrac{k_x - p_x x_0}{q_x} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{\left(k_y + aq_y\right)p_x x_0 - ak_x q_y}{k_y}\lambda + \frac{\left(k_x - p_x x_0\right)q_y}{1+ax_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\lambda + \frac{\left(k_y + aq_y\right)p_x x_0 - ak_x q_y}{2k_y}\right)^2 = \frac{\left(\left(k_y + aq_y\right)p_x x_0 - ak_x q_y\right)^2}{4k_y^2} - \frac{\left(k_x - p_x x_0\right)q_y}{1+ax_0}.$$

Условие, при котором действительная часть характеристического уравнения отрицательна:

$$x_0 > \frac{k_x}{p_x\left(1 + \dfrac{k_y}{aq_y}\right)}\left(p_x > 0\right). \tag{7}$$

С учетом величин практических исходных данных выполнение условия (7) гарантирует, что особая точка является устойчивым фокусом, а фазовые траектории – логарифмическими спиралями.

Результаты исследования и их обсуждение

Проведем исследование обобщенной неклассической модели типа «хищник-жертва» с трофическими функциями и с функцией насыщения популяции жертв (6) в среде пакета имитационного моделирования AnyLogic, который поддерживает все известные в настоящее время парадигмы моделирования [2]. Исследование частных моделей взаимодействия популяций проведено, например, в работах [3, 4].

На рис. 1 представлена принципиальная схема модели в среде AnyLogic.

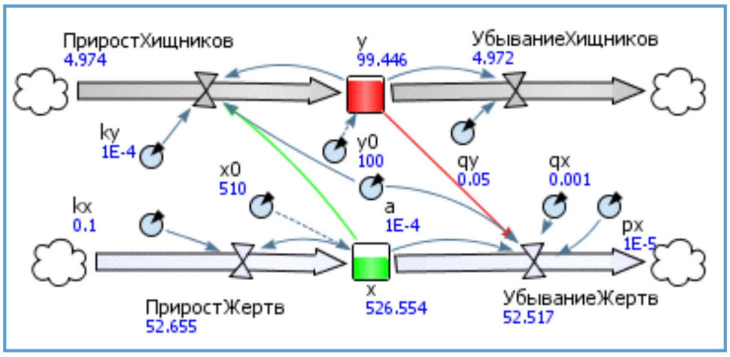

Рис. 1. Схема модели

При выбранных исходных данных

$$\left(x_0 = 510;\ y_0 = 100\right)$$

особая точка с координатами

$$x_0 \approx 526{,}32;\ y_0 \approx 99{,}72$$

является устойчивым фокусом (см. рис. 2 слева). Фазовые траектории – спирали, закручивающиеся против часовой стрелки от исходной точки внутрь к фокусу.

Если условие (7) нарушено, то фокус становится неустойчивым (см рис. 2 справа). В этом случае фазовые траектории представляют собой спирали, раскручивающиеся против часовой стрелки от исходной точки, плотность популяций возрастает.

Выводы

Проведенное качественное и количественное исследование задач практической динамики популяций позволило связать воедино классический математический аппарат аналитических исследований и возможности современных идеологий имитационного моделирования, основанные на парадигме системно-динамического анализа.

Представленные в работе математические модели, формальные зависимости и оценки устойчивости получаемых решений апробированы и подтверждены в результате имитационных экспериментов, выполненных на базе аналитической платформы AnyLogic.

Предложенная методология научного исследования является унифицированной

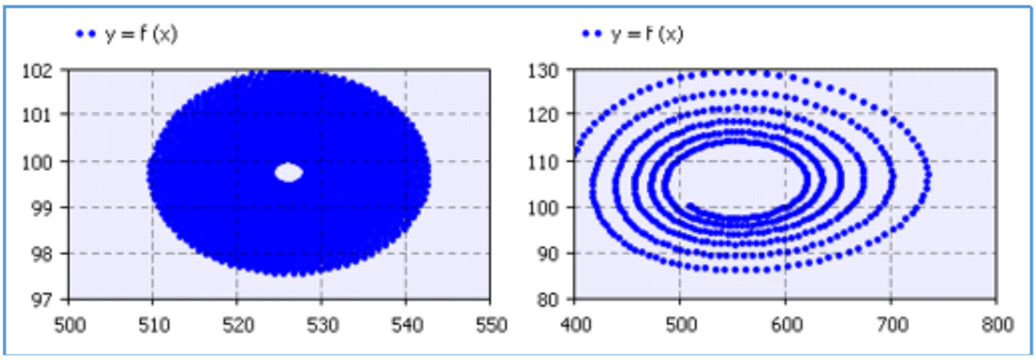

Рис. 2. Фазовые портреты системы с устойчивым и неустойчивым фокусом

и позволяет строить стратегические модели необходимые для принятия управленческих решений с целью минимизации возможных негативных воздействий на экосферу и решать комплексные вопросы оценки характера взаимодействия конкурирующих сообществ и сложных социально-экономических объектов.

Список литературы

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2004. – 288 с.

2. Осипов Г.С. Исследование простейших моделей математической экологии в среде имитационного моделирования AnyLogic // Бюллетень науки и практики: Электрон. журн. – 2017. – №2 (15). – С. 8–22. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/osipov-1 (дата обращения 20.02.2017). DOI: 10.5281/zenodo.291803.

3. Осипов Г.С., Распутина Е.И. Исследование модели хищник-жертва с трофическими функциями // Постулат. – 2017. – № 2. – С. 7.

4. Осипов Г.С., Распутина Е.И. Исследование модели взаимодействия двух популяций с логистическими функциями // Научный электронный архив. – URL: http://econf.rae.ru/article/10507 (дата обращения: 20.02.2017).