УДК 519.24

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРАВИЛА НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

[1]Нурмаганбетова М.О., [2]Нурмагамбетов Д.Е., [3]Мырзакеримова А.Б.

[1]Казахский Национальный медицинский университет им. С.Д. Асфендиярова, Алматы;
[2]«Партнеры Международного образования», Хьюстон, Техас, США;
[3]Международный университет информационных технологии, Алматы, e-mail: mug2009@mail.ru

Разработана математическая модель диагностирования на основе правила нечеткого вывода. Медицина оперирует чаще с нечеткими описаниями состояний систем. Применение методов теории нечетких множеств в медицинских исследованиях является перспективным направлением. Предложенная модель с использованием правила нечеткого вывода позволила найти наиболее приемлемый вывод. Полученные результаты могут быть использованы для практических и технологических решений по решаемой проблеме. Математизация ведет к более глубокому анализу исследуемого объекта.

Ключевые слова: математические модели, принятие решений, нечеткие множества

MATHEMATICAL MODEL OF DIAGNOSISUSING THE RULES OF FUZZY INFERENCE

[1]Nurmaganbetova M.O., [2]Nurmaganbetov D.E., [3]Myrzakerimova A.B.

[1]Kazakh National University named after S.D. Asfendiyarov, Almaty;
[2]OO «International Education Partners», Houston, Texas, USA;
[3]International Information Technology University, Almaty, e-mail: mug2009@mail.ru

A mathematical model of diagnosis based on fuzzy inference rules. Medicine often operates with fuzzy description of the state systems. Application of fuzzy set theory in medical research is a perspective. The proposed model using fuzzy inference rules will find the most appropriate conclusion. The results can be used for practical and technological solutions. Using mathematical model leads to a deeper analysis.

Keywords: Mathematical method, fuzzy inference, decision-making

В настоящее время возросла потребность в современных информационных системах, в основе которых различные математические модели. Создание математических моделей диагностирования с применением методов принятия решений на основе нечетких множеств является перспективным направлением в медицине [1-3]. Применение достижений теории нечетких множеств является оправданной. Человек, обладая огромной функциональной энтропией, способен обрабатывать нечеткую информацию: выбирать, решать, анализировать и т.д., при этом может допустить субъективизм в своих суждениях. В этом плане создание математических моделей диагностирования и прогнозирования, повышающие объективность, является актуальной.

Применим для диагностики математический метод, на основе композиционного правила агрегирования описаний альтернатив, заданных в виде нечетких суждений и выбрать наилучший из них [4]. Пусть имеем U – множество элементов, A – его нечеткое подмножество, степень принадлежности элементов которого есть число из единичного интервала [0,1]. Подмножество A является значениями лингвистической переменной X. Например: переменная X – «заболеваемость» может иметь значение – «низкая», а X – «анамнез» – значение «хорошее» и т.п. Высказывание S – «возможно», также является лингвистической переменной. В общем случае:

Di: «если $X1 = A1i$ и $X2 = A2i$ и ... $Xp = Api$, то $S = Bi$».

Обозначим переменные:

$X1 = A1 \cap X2 = A2 \cap \ldots Xn = Api$ через $X = Ai$

Операции пересечения нечетких множеств соответствует нахождению минимума их функции принадлежности :

$\mu Ai(U) = \min(\mu Ai1(U),\ \mu Ai2(U),\ \ldots,\ \mu Api(U))$

$\mu Aij(Uj)$ – значение принадлежности элемента (Uj) нечеткому множеству Aij

Можно записать в виде:

Di: «Если $X = Ai$, то $S = Bi$»

На основании диагностической таблицы [5] проводится дифференциация форм хронического энтерита в зависимости от локализации поражения тонкой кишки: преимущественное поражение тощей кишки (еонит) и преимущественное поражение подвздошной кишки (илент). В качестве признаков выступают симптомы: частота стула в сутки, вид кала, повышенное выделение желчных кислот с калом, тест с холестирамином, функциональный демпинг-синдром и т.д. Возьмем следующие критерии: частота стула в сутки – X1, вид кала – X2, повышенное выделение желчных кислот с калом – X3, положительный тест с холестирамином – X4, как симптомы наблюдаемые у условного пациента. Приемлемость решений – Y: «возможно», «более, чем возможно», «высокая вероятность» и т.д. задана на множестве j [0,1, 0.2, 0.3, … , 1] и определен как:

S – «возможно» – $\mu_s(x) = X,\ X \in j$

MS – «более чем возможно» – $\mu_{ms}(x) = \sqrt{X^3},\ X \in j$

P – «очень высокая вероятность» – $\mu_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 1 \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 1 \end{cases},\ X \in j$

NS – «вполне возможно» – $\mu_{VS}(x) = X^2,\ X \in j$

US –«отрицательный» – $\mu_{US}(x) = 1 - X,\ X \in j.$

Введем оценку каждого состояния:

A = «частота стула в сутки 6-8 раз» = 0.7/u1; 0.5/u2; 0.5/u3; 0.6/u4; 0.3/u5

B = «вид кала водянисто-пенистый» = 0.8/u1; 0.9/u2; 0.3/u3; 0.7/u4; 0.9/u5;

C = «повышенное выделение желчных кислот с калом» = 0.5/u1; 0.7/u2; 0.5/u3; 0.8/u4; 0.3/u5;

D = «явно повышенное выделение желчных кислот с калом» = 0.4/u1; 0.5/u2; 0.3/u3; 0.5/u4; 0.6/u5;

E = «Положительный тест с холестирамином» = 0.5/u1; 0.6/u2; 0.7/u3; 0.7/u4; 0.5/u5.

Тогда:

D1: если X = A и B, то Y = S то есть «Если частота стула в сутки 6-8 раз и вид кала водянисто-пенистый, то Y = возможно у него «иленет»».

Аналогично:

D2: если X = A и B и C , то Y = MS

D3: если X = A и B и C и E, то Y = P

D4: если X = A и B и Д, то Y = NS

D5: если X = не A или не B или не E, то Y = US

Используем правило минимизации:

$$\mu_i(\nu) = \min_{p \in \nu}(\mu_{A_{i1}}(U_1), (\mu_{A_{i2}}(U_2), ..., (\mu_{A_{ip}}(U_p),),$$

где $V = U_1 x U_2 x \ldots x U_p$; $\nu = (u_1, u_2, \ldots u_p)$ $\mu_{A_{ij}}(U_j)$

значения принадлежности элемента (U_j) нечеткому множеству A_{ij},

для:

D1: $\mu_{M_1}(U) = \min(\mu_A(U\ ), (\mu_в(U\ ))$

$M_1 = \{0.7/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.6/u_4; 0.3/u_5\}$

D2: $\mu_{M_2}(U) = \min(\mu_A(U\ ), (\mu_в(U\ ), (\mu_c(U\ ))$

$M_2 = \{0.5/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.6/u_4; 0.3/u_5\}$

D3: $\mu_{M_3}(U) = \min(\mu_A(U\ ), (\mu_b(U\ ), \mu_C(U\ ), \mu_E(U\ ))$

$M_3 = \{0.5/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.6/u_4; 0.3/u_5\}$

D4: $\mu_{M_4}(U) = \min(\mu_{A_1}(U\ ), (\mu_B(U\ ), (\mu_D(U\ ))$

$M_4 = \{0.4/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.5/u_4; 0.3/u_5\}$

D5: $\mu_{M_5}(U) = \min((1 - \mu_A(U\ ), (1 - \mu_B(U), (1 - \mu_E(U\ ))$

$$M_5 = \begin{vmatrix} \{0.3/u1;\ 05/u2;\ 0.5/u3;\ 0.4/u4;\ 0.7/u5\} \\ \{0.2/u1;\ 0.1/u2;\ 0.7/u3;\ 0.3/u4;\ 0.1/u5\} \\ \{0.5./u1;\ 0.4/u2;\ 0.3/u3;\ 0.3/u4;\ 0.5/u5\} \end{vmatrix}$$

$M_5 = \{0.5/u_1; 05/u_2; 0.7/u_3; 0.4/u_4; 0.7/u_5\}$

D1: если $x = M_1$, то $Y = S$ (возможно «илинет»). Переменная Y задано: j (0,0.1, …, 1), определено как $\mu_S(x) = X\ x \in j$

D2: если $x = M_2$, то $Y = MS$ (более чем возможно) $\mu_{MS}(x) = \sqrt{x^3}\ x \in j$

D3: если $x = M_3$, то $Y = P$ (очень высокая вероятность) $\mu_P(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & x = 1 \\ 0, \text{ если } & x \neq 1 \end{cases}$

D4: если $x = M_4$, то $Y = NS$ (вполне возможно) $\mu_{NS}(x) = X \; x \in j$

D5: если $x = M_5$, то $Y = US$ (невозможно, отсутствует) $\mu_{US}(x) = 1 - x \; x \in j$

$M_1 = \{0.7/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.6/u_4; 0.3/u_5\}$
$M_2 = \{0.5/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.6/u_4; 0.3/u_5\}$
$M_3 = \{0.5/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.6/u_4; 0.3/u_5\}$
$M_4 = \{0.4/u_1; 05/u_2; 0.3/u_3; 0.5/u_4; 0.3/u_5\}$
$M_5 = \{0.5/u_1; 05/u_2; 0.7/u_3; 0.4/u_4; 0.7/u_5\}$

Используя правило преобразования: «Если $x = M_I$, то $Y = Q$» в выражении: $\mu_V(u,i) = \min(1, 1 - \mu_M(u) + \mu_V(u))$ для каждой пары $(u,i) \in u(x)$, получаем следующее нечеткое подмножество:

$$\begin{array}{r} \\ U_1 \\ U_2 \\ D_1 = U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 09 & 1 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0,6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ U_1 \\ U_2 \\ D_2 = U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 09 & 1 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 0.5 & 0.53 & 0.589 & 0.664 & 0.752 & 0.853 & 0.964 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.53 & 0.589 & 0.664 & 0.752 & 0.853 & 0.964 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.73 & 0.789 & 0.864 & 0.952 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.43 & 0.489 & 0.564 & 0.652 & 0.753 & 0.864 & 0.985 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0,73 & 0.789 & 0.864 & 0.952 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ U_1 \\ U_2 \\ D_3 = U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 09 & 1 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\| \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ U_1 \\ U_2 \\ D_5 = U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 09 & 1 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{array} \right\| \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ U_1 \\ U_2 \\ D_5 = U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 09 & 1 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{array} \right\| \end{array}$$

В результате получаем общее функциональное решение:

$D = D_1 \cap \ D_{21} \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5$ т.е. $\mu_u(u,i) = \min(\mu_{u_j}(u,i))$

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 09 & 1 \end{array} \\
\mathrm{D} = \begin{array}{r} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccccccccccc}
0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 05 \\
0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\
0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\
0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\
0.5 & 0.5 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3
\end{array} \right\|
\end{array}
$$

$\mu(E_k(i))$

$\mathrm{E}_1 = \{0.3/0;\ 0.4/0.1;\ 0.5/0.2;\ 0.5/0.3;\ 0.5/0.4;\ 0.5/0.5;\ 05/0.6;\ 0.5/0.7;\ 0.5/0.8;\ 0.5/0.9;\ 0.5/1\}$

Находим: $M(E_{j,\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$, $M(E_{i,\alpha})$ – мощность, где $0 \le \alpha \le 0.3$, $\mathrm{d}\alpha = 0.3$

$\mathrm{E}_{1,\alpha} = \{0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.6;\ 0.7;\ 0.8;\ 0.9;\ 1\}$, $M(E_{1,\alpha}) = 0.5$

$0.3 \le \alpha \le 0.4$, $\mathrm{d}\alpha = 0.1$

$\mathrm{E}_{1,\alpha} = \{\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.6;\ 0.7;\ 0.8;\ 0.9;\ 1\ \}$, $M(E_{1,\alpha}) = 0.55$

$0.4 \le \alpha \le 0.5$, $\mathrm{d}\alpha = 0.1$

$\mathrm{E}_{1,\alpha} = \{\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ 0.6;\ 0.7;\ 0.8;\ 0.9;\ 1\ \}$, $M(E_{1,\alpha}) = 0.6$

Найдем точечную оценку E_1:

$$F(E_1) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(E_{i\alpha} d\alpha) = \frac{1}{0.5} \int_0^{0.5} M(E_{i\alpha} d\alpha) =$$

$$\frac{1}{0.5}\{0.5*0.3 + 0.55*0.1 + 0.6*0.1\} = \frac{1}{0.5}(0.265) = 0.53.$$

Аналогично для второй альтернативы:

$$F(E_{2\alpha}) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(E_{2\alpha} d\alpha) = \frac{1}{0.5} \int_0^{0.5} M(E_{2\alpha} d\alpha) = \frac{1}{0.5}\{0.5*0.5\} = 0.5$$

Для третьей альтернативы:

$$F(E_{2\alpha}) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(E_{2\alpha} d\alpha) = \frac{1}{0.7} \int_0^{0.7} M(E_{2\alpha} d\alpha) =$$

$$= \frac{1}{0.7}\{0.5*0.5 + 0.55*0.1 + 0.6*0.1\} = 0.521$$

Для четвертой альтернативы:

$$F(E_{2\alpha}) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(E_{2\alpha} d\alpha) = \frac{1}{0.4} \int_0^{0.4} M(E_{2\alpha} d\alpha) = \frac{1}{0.4}\{0.4*0.5\} = 0.5$$

Для пятой альтернативы:

$$F(E_{5\alpha}) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(E_{i\alpha} d\alpha) = \frac{1}{0.7}\{0.5*0.5 + 0.55*0.1 + 0.5*0.1\} = 0.507$$

Итак, точечная оценка, найденная с учетом наличия симптомов и их заданных состояний, в качестве приемлемого вывода выбираем высказывание «возможно «иленет»», поскольку имеет наибольшее значение – 5.3. Данная математическая модель позволила из нечетких выводов, какими являются высказывания: «возможно», «более чем возможно», «очень высокая вероятность», «вполне возможно», «отрицательный» выбрать наилучший. Данная математическая модель диагностирования с использованием правила нечеткого вывода, наряду с другими моделями, основывающихся на достижениях теории нечетких множеств позволит, при соответствующей технической реализации, повысить объективность при принятий решений. Применение математического подхода к решению различных задач в медицинских исследованиях позволят более широко использовать современные автоматизированные информационные технологии в здравоохранении.

Список литературы

1. Нурмаганбетова М.О. Математические подходы в медицинских исследованиях: монография. – Германия, Lambert Akademic-Publishing, 2012, c. 172.

2. Нурмаганбетова М.О., Нурмагамбетов Д.Е., Оспан А.Б. Модель диагностирования на основе метода многокритериальной оценки и выбора альтернатив // Сб. докладов X-ой Юбилейной Международной научной конференции «Актуальные вопросы современной техники и технологии», РФ, Липецк, 2013.

3. Нурмаганбетова М.О. Информационно-математическое моделирование в медицине // I международная научно-практическая конференция «Современные направления научных исследований». – Екатеринбург, РФ, 2010. – С.59-60.

4. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких множеств. – Рига Зинатие, 1990. – 184 с.

5. Окороков А.Н. Диагностика болезней внутренних органов, М., 2005.