УДК 517.956.6

ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

Водахова В.А., Карданова М.Р., Эржибова Ф.А., Баттуев М.Б.

ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Настоящая работа посвящена вопросу однозначной разрешимости внутреннекраевой задачи для уравнения Геллерстедта, когда на эллиптической части границы области известна конормальная производная от решения, а на гиперболической части границы области задано нелокальное условие, поточечно связывающее дробные производные от значений решения на характеристиках определенного порядка, зависящего от порядка вырождения уравнения, со значениями решения и производной от него на линии вырождения. При определенных ограничениях неравенственного типа на известные функции доказана теорема единственности. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши второго рода. Методом Карлемана-Векуа осуществлена регуляризация сингулярного уравнения и получено уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи. Определив след решения на линии вырождения и производную от него, решение рассматриваемой задачи определяется как решение задачи Холмгрена в эллиптической части рассматриваемой области и задачи Коши в гиперболической части.

Ключевые слова: нелокальная задача, оператор дробного дифференцирования, уравнение Геллерстедта, сингулярные интегральные уравнения

AN INTERNAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GELLERSTADT EQUATION

Vodahova V.A., Kardanova M.R., Erzhibova F.A., Battuev M.B.

Federal State Educational Institution of Higher Education Kabardino-Balkarian State University n.a. Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

The present work is devoted to the unique solvability an internal boundary value problem for Gellerstedt equation when elliptic part conormal derivative of the solution of the boundary is known, and in the hyperbolic part of the border area is set to a nonlocal condition pointwise binding fractional derivatives of the solution values on the characteristics of a certain order, depending on the order of degeneracy equation, with the values of the solution and its derivatives in the line of degeneracy. Under certain restrictions on the type neravenstvennogo known functions proved the uniqueness theorem. The question of existence is equivalent to solving the problem is reduced to the question of the solvability of a singular integral equation with Cauchy kernel of the second kind. The method of Carleman-Vekua carried regularization of singular equation and obtained Fredholm equation of the second kind, which must be unconditional solvability of the uniqueness of the solution of the problem. Define the following solutions on the degeneration line and its derivatives, the solution of the problem is defined as a solution to the problem Holmgren in the elliptic part of the area under consideration and the Cauchy problem in the hyperbolic part.

Keywords: nonlocal problem, the operator of fractional differentiation, Gellerstedt equation, singular integral equations

В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными теория локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов, изучению которого посвящено немало публикаций. Это объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеивания, в математической биологии. Важным этапом в теории краевых задач стали нелокальные задачи нового типа, названные задачами со смещением [7]. Они являются обобщением задачи Трикоми, содержат широкий класс корректных самосопряженных задач и имеют многомерные аналоги [1,4]. Эти задачи вызвали интерес многих авторов и были посвящены краевым задачам для уравнений различных типов с классическими операторами и операторами дробного в смысле Римана – Лиувилля дифференцирования в краевых условиях [1–5, 7–9]. Естественным обобщением этой теории явились внутреннекраевые задачи для уравнений смешанного типа. В данной работе исследуется внутреннекраевая задача для уравнения Геллерстедта.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение Геллерстедта

$$sign y \cdot |y|^m U_{xx} + U_{yy} = 0, \qquad (1)$$

где $m - \text{const} > 0$, в конечной области Ω, ограниченной жордановой кривой σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками AC, BC уравнения (1), выходящими из точки

$$C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Пусть Ω_1 и Ω_2 – эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω.

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $U(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$A_s[U]\Big|_\sigma \equiv y^m \frac{dy}{ds}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\Bigg|_\sigma = \varphi(s), \quad 0 < s < l \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\alpha(x) D_{0x}^{a}\delta(x) U\left[\Theta_0(x)\right] + \\ +\beta(x) D_{x1}^{b}\omega(x) U\left[\Theta_1(x)\right] + \\ +\gamma(x) U(x,0) + c(x) U_y(x,0) = d(x),\ \forall x \in J,\end{gathered} \tag{3}$$

где a, b – вещественные числа, S – длина кривой σ, отсчитываемая от точки B; $\Theta_0(x), \Theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in J$ с характеристиками AC, BC соответственно; $\varphi(s), \alpha(x), \beta(x),\ \gamma(x), c(x), d(x), \omega(x), \delta(x)$ – заданные непрерывные функции, причем

$$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), c(x), d(x) \in C^1(J),$$

$$\varphi(s) \in C^1(\sigma), \alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + c^2(x) \neq 0.$$

D_{0x}^{l}, D_{x1}^{l} – операторы дробного в смысле Римана–Лиувилля интегро-дифференцирования [10].

Доказательство единственности решения задачи. Теорема. В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(3), если либо

$$a = b = 1 - \varepsilon, \omega(x) = \delta(x) = 1 \tag{4}$$

и выполняются условия

$$A_1(x) = (1-x)^{\varepsilon}\alpha(x) + x^{\varepsilon}\beta(x) - \frac{1}{c_1} x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon} c(x) \neq 0, \tag{5}$$

$$\left[\frac{(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)}{A_1(x)}\right]' \le 0, \left[\frac{x^{\varepsilon}\beta(x)}{A_1(x)}\right]' \ge 0, \frac{\gamma(x)}{A_1(x)} \ge 0, \tag{6}$$

либо

$$a = b = \varepsilon,\ \delta(x) = x^{2\varepsilon-1}, \omega(x) = (1-x)^{2\varepsilon-1}, \tag{7}$$

$$A_2(x) = (1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x) + x^{1-\varepsilon}\beta(x) + \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}\gamma(x) \neq 0, \tag{8}$$

$$(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x) + x^{\varepsilon}\beta(x) - \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}{c_1\Gamma(2\varepsilon)} x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon} c(x) \neq 0,$$

$$\left[\frac{(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)}{A_2(x)}\right]' \le 0, \left[\frac{x^{1-\varepsilon}\beta(x)}{A_2(x)}\right]' \ge 0, \frac{c(x)}{A_2(x)} \le 0, \tag{9}$$

где

$$c_1 = \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon},\ \varepsilon = \frac{m}{2m+4}.$$

Теорему единственности можно доказать, предварительно доказав, что если $U(x,y)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим однородным условиям (2), (3), то интеграл

$$J^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx$$

не может быть отрицательным, где

$$\tau(x) = u(x,0), \nu(x) = u_y(x,0).$$

В этом случае единственность решения задачи (1)-(3) будет сразу следовать из соотношений [1,7].

$$\iint_{\Omega_1}\left(y^m U_x^2 + U_y^2\right)dxdy + \int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = 0,$$

$$J^* \geq 0.$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы $J^* \geq 0$. Удовлетворяя решение задачи Коши [1] условию (3) в результате преобразований получим

$$\left[(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x) + x^{1-\varepsilon}\beta(x) + \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}\gamma(x)\right]\tau(x) =$$

$$= c_1\left[(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x) + x^{1-\varepsilon}\beta(x)D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x)\right] -$$

$$-\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}c(x)\nu(x) + \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}d(x). \quad (10)$$

Пусть выполняются условия (7) – (9) теоремы единственности. Перепишем (10) в виде

$$\tau(x) = \alpha_1(x)D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x) + \beta_1(x)\,D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x) + \gamma_1(x)\nu(x) + f_1(x), \quad (11)$$

где

$$\alpha_1(x) = \frac{c_1(1-x)^{1-\varepsilon}}{A_2(x)},\ \beta_1(x) = \frac{c_1 x^{1-\varepsilon}\beta(x)}{A_2(x)}$$

$$\gamma_1(x) = \frac{-\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\frac{x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}c(x)}{A_2(x)},\ f_1(x) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\frac{x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)}{A_2(x)}.$$

Докажем, что решение задачи (1) – (3) единственно. Для этого при $\alpha(x)=0$ покажем, что интеграл J^* не может быть отрицательным. В самом деле,

$$J^* = \int_0^1 \alpha_1(x)\nu(x)D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x)\,dx + \int_0^1 \beta_1(x)\nu(x)D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x)\,dx + \int_0^1 \gamma_1(x)\nu^2(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\int_0^1 \alpha_1(x)\nu(x)\,dx\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\int_0^1 \beta_1(x)\nu(x)\,dx\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(t-x)^{2\varepsilon}} + \int_0^1 \gamma_1(x)\nu^2(x)\,dx$$

Воспользуемся формулой [10] для функции $\Gamma(\mu)$:

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}\cos kt\,dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\frac{\mu\pi}{2}\left(k>0, 0<\mu<1\right). \quad (12)$$

Полагая в ней $k = |x-\xi|$, $\mu = 2\varepsilon$, получим

$$\frac{1}{|x-\xi|^{2\varepsilon}} = \frac{1}{\Gamma(2\varepsilon_2)\cos\pi\varepsilon}\int_0^\infty t^{2\varepsilon-1}\cos|x-\xi|\,dt.$$

Отсюда поменяв порядок интегрирования, а затем, интегрируя по частям также как и ранее [3,8], получим

$$\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}J^*=-\int_0^\infty t^{2\varepsilon-1}dt\int_0^1\alpha_1'(x)\left[\left(\int_0^x\nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_0^x\nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx+$$

$$+\int_0^x t^{2\varepsilon_2-1}dt\int_0^x\beta_1'(x)\left[\left(\int_x^1\nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_x^1\nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx+\frac{2}{\pi}\sin\pi\varepsilon\int_0^1\gamma_1(x)\nu^2(x)dx.$$

Очевидно, что при выполнении $\alpha_1'(x)\le 0$, $\beta_1'(x)\ge 0$, $\gamma_1(x)\ge 0$ будет выполняться $J^*\ge 0$.

Пусть теперь выполняются условия (4) – (6) теоремы. Покажем, что и в этом случае $J^*\ge 0$. При выполнении условий (4) теоремы соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_2 области Ω, будет иметь вид

$$c_1\nu(x)=\alpha_2(x)D_{0x}^{1-2\varepsilon}\tau(x)+\beta_2(x)D_{x1}^{1-2\varepsilon}\tau(x)+\gamma_2(x)\tau(x)+f_2(x), \qquad (13)$$

где

$$\alpha_2(x)=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\;\frac{(1-x)^\varepsilon\alpha(x)}{A_1(x)},\ \beta_2(x)=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\cdot\frac{x^\varepsilon\beta(x)}{A_1(x)},$$

$$\gamma_2(x)=\frac{x^\varepsilon(1-x)^\varepsilon\gamma(x)}{A_1(x)},\quad f_2(x)=-\frac{x^\varepsilon(1-x)^\varepsilon d(x)}{A_1(x)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\Gamma(2\varepsilon)c_1\cdot\int_0^1\tau(x)\nu(x)dx=\int_0^1\alpha_2(x)\tau(x)\left[\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\varepsilon}}\right]dx-$$

$$-\int_0^1\beta_2(x)\tau(x)\left[\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2\varepsilon}}\right]dx+\int_0^1\gamma_2(x)\tau^2(x)dx,$$

который с учетом обозначений

$$\frac{\sin 2\pi\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\varepsilon}}=\tau_1(x),\quad -\frac{\sin 2\pi\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\varepsilon}}=\tau_2(x)$$

и формулы обращения [10] интегрального уравнения Абеля, а также (12) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\varepsilon)c_1\cdot\sin 2\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon J^*=\int_0^1\alpha_2(x)\tau_1(x)dx\int_0^x\tau_1(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{2\varepsilon-1}\cos t(x-\xi)dt+$$

$$+\int_0^1\beta_2(x)\tau_2(x)dx\int_x^1\tau_2(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{2\varepsilon-1}\cos t(\xi-x)dt+\int_0^1\gamma_2(x)\tau^2(x)dx.$$

Поменяв порядок интегрирования, в результате несложных преобразований будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\varepsilon)c_1\cdot\sin 2\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon J^*=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2\varepsilon-1}\left\{\int_0^1 \alpha_2(1)\left[\left(\int_0^1 \tau_1(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2+\left(\int_0^1 \tau_1(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1 \alpha_2'(x)\left[\left(\int_0^x \tau_1(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2+\left(\int_0^x \tau_1(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]dx\right\}dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2\varepsilon-1}\left\{-\beta_2(0)\left[\left(\int_0^1 \tau_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2+\left(\int_0^1 \tau_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\int_0^1 \beta_2'(x)\left[\left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2+\left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]dx\right\}dt+\int_0^1 \gamma_2(x)\tau^2(x)dx.$$

С учетом (5), (6) и того, что $c_1\sin 2\pi\varepsilon\cos\pi\varepsilon>0$, из последнего заключаем, что интеграл $J^*\geq 0$. Таким образом, при выполнении условий (4) – (6) или (7) – (9) теоремы единственности доказано, что

$$J^*=\int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx\geq 0.$$

Отсюда заключаем единственность решения задачи.

Доказательство существования решения задачи**.** Переходя к доказательству существования решения задачи (1) – (3) относительно кривой σ будем предполагать, что 1) параметрические уравнения кривой σ, где *s* – длина дуги, отсчитываемая от точки *B*; функции *x*(*s*), *y*(*s*) имеют непрерывные производные *x*′(*s*), *y*′(*s*) на отрезке , необращающиеся одновременно в ноль; производные *x*″(*s*), *y*″(*s*) удовлетворяют условию Гельдера на [0, *l*], где *l* – длина σ; 2) в окрестности концов кривой σ выполнено условие

$$\left|\frac{dx}{ds}\right|\leq cy^{m+1}(s),$$

где *c*=const.

Покажем сначала, что решение задачи (1) – (3) существует в случае, когда выполнены условия (4) – (6). Для этого потребуем дополнительно

$$\beta(x)=(1-x)^{\varepsilon_1}\beta_1(x),\ \varepsilon_1>\varepsilon$$

$$\alpha(x),\ \beta_1(x),\ \gamma(x),\ c(x),\alpha(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^3(J).$$

Фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на *J* из эллиптической части Ω_1 смешанной области Ω имеет вид

$$\nu(x)=\frac{k_2}{1-2\varepsilon}\int_0^1\frac{(t-x)\tau' dt}{|t-x|^{2-2\varepsilon}}-k_2\int_0^1\frac{\tau(t)dt}{(x+t-2xt)^{2-2\varepsilon}}-\frac{k_2\tau(0)}{(1-2\varepsilon)x^{1-2\varepsilon}}-\frac{k_2\tau(1)}{(1-2\varepsilon)(1-x)^{1-2\varepsilon}}+$$

$$+\int_0^1\frac{\partial^2 H(t,0;x,0)}{\partial y_0\,\partial y}\tau(t)dt+\int_0^1\chi(s)\frac{\partial q_2(\xi,\eta;x,0)}{\partial y}ds, \tag{14}$$

где свойства функций $\chi(s)$, $H(t,0;x,0)$, $q_2(\xi,\eta;x,0)$ хорошо известны [1,7]. Исключив $\nu(x)$ из (14) и (13) в результате замены $\rho(x)=x^{2\varepsilon-2}\tau(x)$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$A(x)\rho(x)+\frac{B(x)}{\pi i}\int_0^1\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1-2\xi}{\xi+x-2\xi x}\right)\rho(\xi)d\xi=f(x), \tag{15}$$

где

$$A(x)=\frac{\pi}{\sin(2\pi\varepsilon)}\Big[c_1A_1(x)\big(\cos(2\pi\varepsilon)-1\big)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\Big(\cos(2\pi\varepsilon)x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon_1}\beta_1(x)-(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)\Big)\Bigg];$$

$$B(x)=\pi i\left[c_1A_1(x)+\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon_1}\beta_1(x)\right];\quad f(x)=x^{2\varepsilon-2}\left[R(\tau)+F^*(x)\right].$$

Последнее с учетом обозначения $t=\frac{\xi^2}{1-2\xi+2\xi^2}$, $y=\frac{x^2}{1-2x+2x^2}$ примет вид

$$A^*(y)\rho^*(y)+\frac{B^*(y)}{\pi i}\int_0^1\frac{\rho^*(t)dt}{t-y}=R^*\left[\rho^*\right]+f^*(y), \tag{16}$$

где

$$\rho^*(y)=\left(1-2x+2x^2\right)\rho(x),\ f^*(y)=\left(1-2x+2x^2\right)f(x),\ x=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{1-y}},$$

$$A^*(y)=\left(1-2x+2x^2\right)A(x),\ B^*(y)=\left(1-2x+2x^2\right)B(x).$$

Таким образом, задача (1) – (3) эквивалентна в смысле разрешимости сингулярному интегральному уравнению (16). Так как

$$A^{*2}(y)-B^{*2}(y)\neq 0,$$

то уравнение (16) нормального типа [6]. В соответствии с этим его решение может быть построено согласно общей теории [6]. Из свойств оператора R и функций, входящих в уравнение заключаем, что

$$\tau(x)\in H\left(\bar{J}\right)\cap C^2(y).$$

По найденному $\tau(x)$ можно определить $\nu(x)$ из соотношения (13). Затем решение $u(x,y)$ задачи (1) – (3) может быть найдено в области Ω_2 как решение задачи Коши, а в области Ω_1 по формуле

$$u(x,y)=\int_0^1\tau(x_0)\frac{\partial G(x_0,0;x,y)}{\partial y_0}dx_0+\int_0^1\varphi(s)G(\xi,\eta;x,y)ds,$$

где $G(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи (1), (2), $u(x,0)=\tau(x)$ [1].

Существование решения задачи (1)–(3) при выполнении условий (7)–(8) теоремы доказывается также путем редукции к сингулярному интегральному уравнению, индекс которого равен нулю.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. 448 с.

2. Водахова В.А., Кумыков В.К., Шокуева Ф.Г. Нелокальная задача для уравнения влагопереноса Бицадзе-Лыкова // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – №9–1. – С. 17–22.

3. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа// Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52. №5. – С. 707–716.

4. Кумыкова С.К., Водахова В.А, Гучаева З.Х. Задачи с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений. – Нальчик, 2015. – 125 с.

5. Кумыкова С.К., Эржибова Ф.А., Гучаева З.Х. Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – №9–1. – С. 73–78.

6. Мусхелешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача с операторами Римана-Лиувилля для уравнения смешанного типа третьего порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ-мат. науки. – 2016. – Т. 20, №1. – С. 43–51.

9. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

10. Oleg A. Repin and Svetlana Kumykova. A boundary-Value problem for the equation of mixed type with generalized operators of fractional differentiation in the boundary conditions // Journal of Applied Analysis. 2016; 22(1): 27–36.