

УДК 539.3

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕРЖНЯ ИЗ ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПОВЕРХНОСТНОГО ТЕПЛООБМЕНА

¹Такишов А.А., ¹Кудайкулов А.К., ²Ташев А.А., ¹Жансеитова Ж.К., ¹Аринов Е.

¹АО «Жезказганский университет им. О.А. Байконурова», Жезказган, e-mail: arinov91@mail.ru;

²Институт информационных и вычислительных технологий, Комитет науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы

На основе фундаментальных законов сохранения энергии строится разрешающая система уравнений, характеризующая теплофизическое состояние стержня ограниченной длины, выполненного из жаропрочного сплава АНВ-300. При этом стержень находится под воздействием точечной температуры и поверхностного теплообмена. Для этого материала коэффициент теплового расширения зависит от температуры. Определяются поля температур, составляющие деформации и напряжения. Вычисляются величина возникающего осевого усилия и температурное удлинение стержня.

Ключевые слова: жаропрочные сплавы, конвективный теплообмен, точечная температура, теплопроводность, усилие, напряжение, деформация

THERMO MECHANICAL CONDITION OF A ROD FROM HEAT RESISTANCE ALLOY IN CASE OF IMPACT OF LOCAL TEMPERATURE AND SUPERFICIAL HEAT TRANSFER

¹Takishov A.A., ¹Kudaykulov A.K., ²Tashev A.A., ¹Zhanseitova Z.K., ¹Arinov E.

¹Zhezkazgan university named after O.A. Baykonurov, Zhezkazgan, e-mail: arinov91@mail.ru;

²Institute of Information and computing technologies, Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty

On the basis of the fundamental law on energy conservation, the permitting system of the equations characterizing a thermo physical condition of the rod of limited length made of heat resistance alloy АНВ-300 is constructed. At the same time the rod is under the influence of the point temperature and superficial heat transfer. For this material the coefficient of thermal expansion depends on temperature. The fields of temperatures constituting deformations and voltage are determined. The size of the arising axial force and temperature lengthening of a rod are calculated.

Keywords: heat resistance alloys, convective heat transfer, point temperature, thermal conductivity, force, voltage, deformation

Рассмотрим стержень ограниченной длины L , см, площадь поперечного сечения которого F , см², постоянна по ее длине. Стержень изготовлен из жаропрочного сплава АНВ-300. Значение коэффициента теплового расширения этого материала α , 1/°C, строго зависит от значения температуры, т.е. $\alpha = \alpha(T(x))$. Здесь $T = T(x)$ –

поле распределения температуры по длине стержня, которое необходимо определить с учетом существующих граничных условий. Коэффициент теплопроводности материала стержня обозначим через $K_{\text{ст}}$, Вт/(см·°C), а модуль упругости через E , кГ/см². Расчетная схема рассматриваемой задачи приводится на рис. 1.

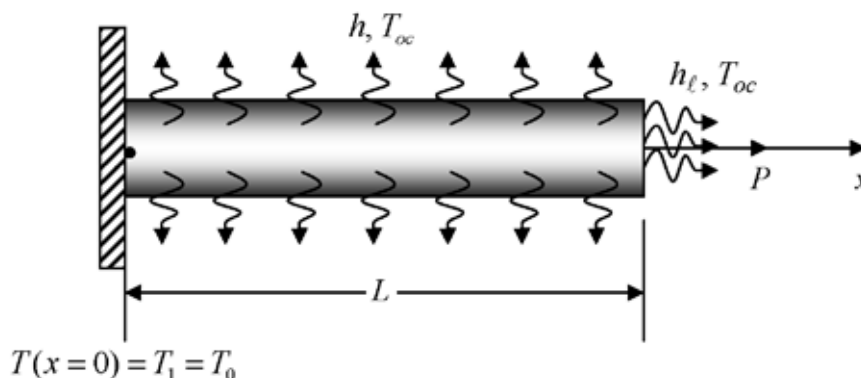


Рис. 1. Расчетная схема рассматриваемой задачи

Предположим, что левый конец стержня жестко-закреплен и совпадает с началом координат. На этом конце задана температура $T(x=0) = T_1 = T_0$. Через площади боковой поверхности и поперечного сечения правого конца происходит теплообмен с окружающей средой. При этом температура окружающей среды T_{oc} , °С, коэффициент теплообмена h , Вт/(см²·°С) и ее значение также постоянны во всюду. Кроме того, на правом конце стержня приложена осевая растягивающая сила P , кГ. Требуется определить поле распределения температуры $T = T(x)$ по длине стержня с учетом наличия источника тепла и глобального теплообмена.

Также необходимо вычислить удлинение стержня от теплового расширения и растягивающей силы P .

Для этого сначала дискретизируем рассматриваемый стержень n элементами одинаковой длины. Каждый элемент рассмотрим как квадратный конечный элемент с тремя узлами. Тогда число всех узлов будет равно ЧУЗ=2n+1. Далее для каждого элемента напишем выражение функционала, которое характеризует полную тепловую энергию с учетом имеющихся граничных условий. В частности, для первого элемента такой функционал имеет следующий вид [1–3]:

$$J_1 = \int_{V_1} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{\text{бок}}} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS, \quad (1)$$

где V_1 – объем первого элемента; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности первого элемента. С учетом (3) для первого элемента имеем, что

$$T(x) = \varphi_1(x) \cdot T_1 + \varphi_2(x) \cdot T_2 + \varphi_3(x) \cdot T_3, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{n}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \cdot T_1 + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} \cdot T_2 + \frac{\partial \varphi_3(x)}{\partial x} \cdot T_3, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{n}; \quad (3)$$

где T_1 , T_2 и T_3 – значения температур в узлах первого элемента. При этом

$$T_1 = T(x=0) = T_0; \quad T_2 = T\left(x = \frac{L}{2n}\right); \quad T_3 = T\left(x = \frac{L}{n}\right). \quad (4)$$

Будем учитывать, что

$$\int_{V_1} f(x) dV = F \int_0^{\ell} f(x) dx,$$

где F – площадь поперечного сечения рассматриваемого элемента стержня; $\ell = \frac{L}{n}$ – длина элемента стержня;

$$\int_{S_{\text{бок}}} f(x) dS = P \int_0^{\ell} f(x) dx,$$

где P – периметр поперечного сечения, а также интеграла по площади поперечного сечения

$$\int_{S_{\text{бок}}} T dS = FT_1.$$

Тогда для первого элемента интегрированный вид функционала (1) имеет следующий вид:

$$J_1 = \frac{K_{xx} \cdot F}{2\ell} \left[\frac{7}{3} T_1^2 - \frac{16}{3} T_1 \cdot T_2 + \frac{2}{3} T_1 \cdot T_3 - \frac{16}{3} T_2 \cdot T_3 + \frac{16}{3} T_2^2 + \frac{7}{3} T_3^2 \right] + \\ + \frac{Ph}{2} \left[\frac{2\ell}{15} T_1^2 + \frac{2\ell}{15} T_1 \cdot T_2 - \frac{\ell}{15} T_1 \cdot T_3 + \frac{8\ell}{15} T_2^2 + \frac{2\ell}{15} T_3^2 + \frac{2\ell}{15} T_2 \cdot T_3 - \right]$$

$$\left. -\frac{\ell}{3}T_{oc} \cdot T_1 - \frac{4\ell}{3}T_{oc} \cdot T_2 - \frac{\ell}{3}T_{oc} \cdot T_3 + \ell \cdot T_{oc}^2 \right]. \quad (5)$$

Начиная со второго до $(n-1)$ -го элемента выражение соответствующего функционала для каждого элемента имеет следующий интегрированный вид

$$\begin{aligned} J_r &= \int_{V_{r\bar{a}i}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_r} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS = \\ &= \frac{K_{xx} \cdot F}{2\ell} \left[\frac{7}{3}T_i^2 - \frac{16}{3}T_i \cdot T_j + \frac{2}{3}T_i \cdot T_k - \frac{16}{3}T_j \cdot T_k + \frac{16}{3}T_j^2 + \frac{7}{3}T_k^2 \right] + \\ &+ \frac{Ph}{2} \left[\frac{2\ell}{15}T_i^2 + \frac{2\ell}{15}T_i \cdot T_j - \frac{\ell}{15}T_i \cdot T_k + \frac{8\ell}{15}T_j^2 + \frac{2\ell}{15}T_k^2 + \frac{2\ell}{15}T_j \cdot T_k - \right. \\ &\left. - \frac{\ell}{3}T_{oc} \cdot T_i - \frac{4\ell}{3}T_{oc} \cdot T_j - \frac{\ell}{3}T_{oc} \cdot T_k + \ell \cdot T_{oc}^2 \right], \quad x_i \leq x \leq x_k, \end{aligned} \quad (6)$$

где $r = 2 \div (n-1)$ – номер элемента; $i = (2r-1)$; $j = 2r$; $k = 2r+1$ и

$$x_i = \frac{L}{n} \cdot (r-1); \quad x_k = \frac{L}{n} r.$$

Наконец, для последнего n -го элемента выражение функционала, которое характеризует полную тепловую энергию имеет следующий интегрированный вид

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{V_n} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{m\bar{o}n}} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS + \int_{S_{L_{nnc}}} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 dS = \\ &= \frac{K_{xx} \cdot F}{2\ell} \left[\frac{7}{3}T_{2n-1}^2 - \frac{16}{3}T_{2n-1} \cdot T_{2n} + \frac{2}{3}T_{2n-1} \cdot T_{2n+1} - \frac{16}{3}T_{2n} \cdot T_{2n+1} + \frac{16}{3}T_{2n}^2 + \frac{7}{3}T_{2n+1}^2 \right] + \\ &+ \frac{Ph}{2} \left[\frac{2\ell}{15}T_{2n-1}^2 + \frac{2\ell}{15}T_{2n-1} \cdot T_{2n} - \frac{\ell}{15}T_{2n-1} \cdot T_{2n+1} + \frac{8\ell}{15}T_{2n}^2 + \frac{2\ell}{15}T_{2n+1}^2 + \frac{2\ell}{15}T_{2n} \cdot T_{2n+1} - \right. \\ &\left. - \frac{\ell}{3}T_{oc} \cdot T_{2n-1} - \frac{4\ell}{3}T_{oc} \cdot T_{2n} - \frac{\ell}{3}T_{oc} \cdot T_{2n+1} + \ell \cdot T_{oc}^2 \right] + \frac{Fh}{2} (T_{2n+1} - T_{oc})^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\ell = L - \frac{(n-1) \cdot L}{n} = \frac{L}{n}$; $S_{L_{nnc}}$ – площадь поперечного сечения правого конца стержня.

Тогда выражение функционала, которое характеризует полную тепловую энергию рассматриваемого стержня, в целом имеет следующий вид

$$J = \sum_{r=1}^n J_r, \quad (8)$$

Учитывая, что значение температуры в первом узле задано, т.е. $T_1 = T(x=0) = T_0$, минимизируя функционал (8) по узловым значениям температуры $T_2, T_3, \dots, T_{2n+1}$ построим следующую разрешающую систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial T_r} = 0, \quad r = 2 \div (2n+1). \quad (9)$$

Решая последнюю систему, находим значения температур в узлах элементов. Пользуясь соотношением (3), находим закон распределения поля температур в пределах каждого элемента, а по ним по длине рассматриваемого стержня в целом.

В работе [4] для жаропрочного тугоплавкого сплава приводятся результаты натурального эксперимента по определению

зависимости коэффициента теплового расширения от температуры в виде графиков. Эти данные в первом разделе приведены в табличной форме, в том числе и для сплава АНВ-300.

Из результатов натурального эксперимента работы [4] видно, что $\alpha(T(x))$ меняется линейно в интервале температур

$$T \in [20^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C}]; T \in [100^\circ\text{C}; 200^\circ\text{C}]; T \in [200^\circ\text{C}; 300^\circ\text{C}];$$

$$T \in [300^\circ\text{C}; 400^\circ\text{C}]; T \in [400^\circ\text{C}; 500^\circ\text{C}]; T \in [500^\circ\text{C}; 600^\circ\text{C}];$$

$$T \in [600^\circ\text{C}; 700^\circ\text{C}]; T \in [700^\circ\text{C}; 800^\circ\text{C}].$$

Поэтому эти зависимости можно описать математически следующим образом

$$\left. \begin{aligned} 1) \alpha &= 0,0225 \cdot 10^{-6} \cdot T + 9,65 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 20^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C}; \\ 2) \alpha &= 0,013 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,6 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 100^\circ\text{C} \leq T \leq 200^\circ\text{C}; \\ 3) \alpha &= 0,015 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,2 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 200^\circ\text{C} \leq T \leq 300^\circ\text{C}; \\ 4) \alpha &= 0,023 \cdot 10^{-6} \cdot T + 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 300^\circ\text{C} \leq T \leq 400^\circ\text{C}; \\ 5) \alpha &= 0,013 \cdot 10^{-6} \cdot T + 11,8 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 400^\circ\text{C} \leq T \leq 500^\circ\text{C}; \\ 6) \alpha &= 0,02 \cdot 10^{-6} \cdot T + 8,3 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 500^\circ\text{C} \leq T \leq 600^\circ\text{C}; \\ 7) \alpha &= 0,017 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,1 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 600^\circ\text{C} \leq T \leq 700^\circ\text{C}; \\ 8) \alpha &= 0,012 \cdot 10^{-6} \cdot T + 13,6 \cdot 10^{-6} \text{ (1/}^\circ\text{C)} \text{ при } 700^\circ\text{C} \leq T \leq 800^\circ\text{C}; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Кроме того, известно (раздел 1), что поле распределение коэффициента теплового расширения для r -го элемента определяется (1.35), где α_i , α_j и α_k – узловые значения коэффициента теплового расширения в r -м элементе; $i = 2r - 1$; $j = 2r$; $k = 2r + 1$.

Тогда узловые значения α определяются исходя из закона распределения температуры в каждом элементе и с помощью соотношения (10). А величина удлинение r -того элемента определяется с помощью соотношения

$$\Delta l_{Tr} = \int_0^{\ell} \alpha(T(x)) \cdot T(x) dx = \int_0^{\ell} \left[\sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) \cdot \alpha_i \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) \cdot T_i \right] dx, \quad (11)$$

где $\varphi_i(x)$ – функция формы для r -го квадратичного элемента; α_i , T_i – узловые значения коэффициента теплового расширения и температуры r -го квадратичного элемента.

Тогда общее удлинение рассматриваемого стержня в целом от теплового расширения определяется следующим образом

$$\Delta l_T = \sum_{r=1}^n \Delta l_{Tr}. \quad (12)$$

На основе закона Гука удлинение рассматриваемого стержня от осевой растягивающей силы P определяется следующим образом

$$\Delta l_P = \frac{P\ell}{EF}. \quad (13)$$

Тогда величина общего удлинения рассматриваемого стержня будет

$$\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_P. \quad (14)$$

Для реализации вышеизложенного алгоритма примем за исходные данные следующее

$$K_{xx} = 72 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}); h = 10 \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C});$$

$$T_{oc} = 40^\circ\text{C};$$

$$T(x=0) = T_1 = T_0 = [100^\circ\text{C} \div 800^\circ\text{C}];$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ}/\text{см}^2; L = 30 \text{ см}; n = 300;$$

$$\ell = \frac{L}{n} = 0,1 \text{ см}.$$

Форма поперечного сечения рассматриваемого стержня является круг радиусом $r = 1 \text{ см}$. Площадь поперечного сечения $F = \pi r^2 = \pi \text{ (см}^2\text{)}$, а периметр $P = 2\pi r = 2\pi \text{ (см)}$.

На рис. 2 приводится поле распределения температур по длине стержня при разных значениях T_0 , а в таблице приводятся значения $\Delta\ell_T$ при разных значениях T_0 , т.е. зависимость между T_0 и $\Delta\ell_T$, R , σ . Из рис. 2 видно, что поле распределения температуры по длине стержня будет гладкой кривой. Графическая зависимость между величинами источника температуры T_0 и соответствующего удлинение стержня ($\Delta\ell_T$) от теплового расширения приводится на рис. 3.

При $T_0 = 100^\circ\text{C}$, начиная с $x = 15,5 \text{ см}$, т.е. на участке $15,5 \leq x \leq 30 \text{ см}$ наблюдается постоянная температура, значения, которого равна $\approx 40^\circ\text{C}$. В этом случае из за те-

плового расширения стержень удлиняется на $\Delta\ell_T = 0,014 \text{ см}$. Для сравнения, следует сказать, что это удлинение эквивалентно к удлинению стержня, если его растягивать силой $R = 2930,66 \text{ кГ}$. Естественно, на основе закона Гука в этом случае в сечении стержня возникало бы растягивающее напряжение величиной $\sigma = 933,33 \text{ кГ}/\text{см}^2$.

При увеличении значения заданной температуры в два раза, т.е. при $T_0 = 200(^\circ\text{C})$ на участке $19,2 \leq x \leq 30 \text{ см}$, наблюдается 40°C поле температуры. В этом случае величина удлинение стержня составляет $\Delta\ell_T = 0,0165 \text{ см}$ и будет больше на $17,657\%$ чем в случае $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Эта величина удлинение эквивалентно к удлинению стержня находящейся по растягивающей нагрузкой $R = 3454 \text{ кГ}$. При этом растягивающее напряжение было бы $\sigma = 1100 \text{ кГ}/\text{см}^2$. Если увеличить значение точечной температуры в три раза, т.е. при $T_0 = 300^\circ\text{C}$ величина $\Delta\ell_T = 0,0193 \text{ см}$, что превышает на $37,857\%$ чем в случае $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Также следует отметить, что в этом случае на участке $21,1 \leq x \leq 30 \text{ см}$ стержня наблюдается постоянная температура близко к температуре окружающей стержня среды. В этом случае величина $\Delta\ell_T$ эквивалентно к растяжению рассматриваемого стержня с силой $R = 4040 \text{ кГ}$. При этом значение растягивающего напряжения возникающих в сечениях составляло бы $\sigma = 1286 \text{ (кГ}/\text{см}^2\text{)}$. Следует отметить, что для обычных сталей это напряжение уже превышает предел пропорциональности.

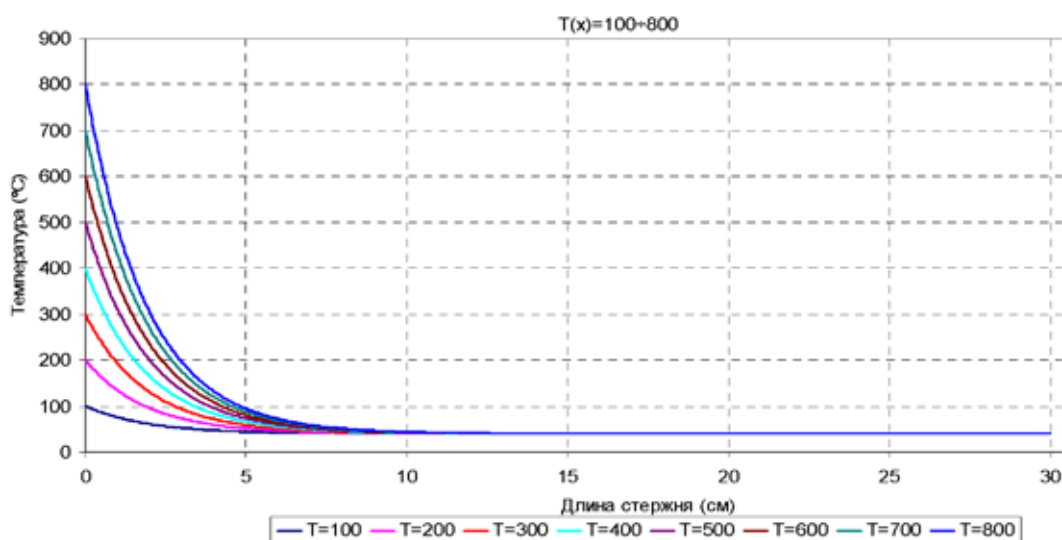


Рис. 2. Поле распределение температуры по длине стержня при разных значениях T_0

Зависимость между T_0 и $\Delta l_T, R, \sigma$

№ п/п	$T_0, ^\circ\text{C}$	$\Delta l_T, \text{см}$	Эквивалентная «растягивающая» сила R , кГ, при котором получилось бы такое удлинение	Эквивалентное «растягивающее» напряжение σ , кГ/см ²	$\overline{\Delta l_T}, \text{см, при } \alpha = \text{const} = 10,1 \cdot 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$	Относительное удлинение, %	$k = \frac{\Delta l_T}{\overline{\Delta l_T}}$, раз
1.	100	0,014	2930,66	933,33	0,0133	0,047	1,052
2.	200	0,0165	3454	1100	0,0152	0,055	1,085
3.	300	0,0193	4040,1	1286,66	0,0171	0,064	1,129
4.	400	0,02247	4703,72	1498	0,0190	0,075	1,183
5.	500	0,0259	5432,2	1730	0,0209	0,086	1,239
6.	600	0,0297	6217,2	1980	0,0228	0,1	1,303
7.	700	0,03388	7092,2	2258,66	0,0247	0,113	1,372
8.	800	0,038	7954,66	2533,33	0,0267	0,127	1,423

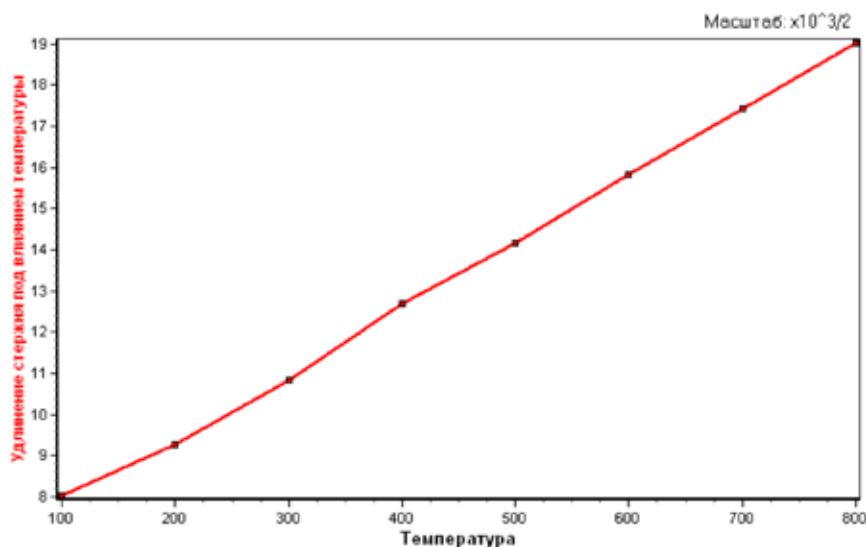


Рис. 3. Графическая зависимость между T_0 и Δl_T

Теперь увеличивая значение T_0 в четыре раза, т.е. при $T_0 = 400^\circ\text{C}$ имеем, что $\Delta l_T = 0,02247$ см. Это эквивалентно к удлинению стержня при ее растяжении силой, величина которого $R=4703,72$ кГ. В этом случае в сечениях стержня возникало бы растягивающее напряжение величиной $\sigma=1498$ (кГ/см²). Естественно для обычных сталей это напряжение считается разрушающей. При $T_0 = 500^\circ\text{C}$ значение $\Delta l_T = 0,02595$ см. Это на 85 % больше чем аналогичное значение Δl_T при $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Здесь следует отметить, для того чтобы получить удлинение стержня в размере $\Delta l_T = 0,02595$ см при ее растяжении необходимо было бы растянуть с силой $R=5432,1$ кГ. При этом в сечениях стержня появилось бы растягивающее напряжение $\sigma=1730$ (кГ/см²), которое является большим для обычных стальных конструкции. Необ-

ходимо отметить, что при $T_0 = 600^\circ\text{C}$ величина $\Delta l_T = 0,0297$ см и она будет на 112,14 % больше чем Δl_T при $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Эквивалентная растягивающая сила было бы равно $R=6217,2$ кГ и соответствующее растягивающее напряжение будет равно $\sigma=1980$ кГ/см².

Интересно отметить, что при увеличении значения температуры T_0 от $T_0 = 100^\circ\text{C}$ до $T_0 = 600^\circ\text{C}$, значения $\Delta l_T, R$ и σ увеличиваются одинаково на 112,14%.

Список литературы

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Kudaykulov A. Algorithm For Parameters of the Dearing Elements of Oil Heating Installations // International Journal of Computational Sciences and Information Technology. – 2015. – Vol. I. – P. 13–20.
4. Химушин Ф.Ф. Жаропрочные стали и сплавы. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Металлургия, 1969. – 749 с.