

УДК 622.619: 004.946

АЛГОРИТМ РАСШИРЕНИЯ СИСТЕМЫ ОСНОВАНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ОШИБОК В МОДУЛЯРНОМ КОДЕ

Макарова А.В., Саркисов А.Б., Калмыков И.А., Жолобов П.А., Ефременков И.Д.

ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь, e-mail: kia762@yandex.ru

Стремление обеспечить цифровую обработку сигналов с максимальной производительности способствовали применению параллельных методов вычислений. Для обеспечения максимальной производительности ортогональных преобразований сигналов используют параллельную обработку на самых различных уровнях. В настоящее время внимание уделяется вопросам обеспечения параллельных вычислений на уровне операций. Для решения данной проблемы предлагается использовать непозиционные модулярные коды. Однако эти коды позволяют не только повышать производительность спецпроцессоров, но способны обнаруживать и корректировать ошибки, возникающие из-за отказов и сбоев оборудования. Разработка эффективного метода поиска местоположения и глубины ошибки на основе использования модулярных кодов является актуальной задачей. В работе рассмотрены вопросы применения полиномиальной системы классов вычетов для коррекции ошибок с использованием процедуры расширения системы оснований.

Ключевые слова: модулярные коды, коррекция ошибок, полиномиальная система классов вычетов

THE ALGORITHM TO EXPAND THE SYSTEM OF BASES USED FOR ERROR CORRECTION IN MODULAR CODE

Makarova A.V., Sarkisov A.B., Kalmykov I.A., Zholobov P.A., Efremenkov I.D.

Federal state Autonomous educational institution of higher professional education
«North-Caucasus Federal University», Stavropol, e-mail: kia762@yandex.ru

The desire to provide digital signal processing with maximum performance promoted the use of parallel computing methods. To ensure maximum performance of orthogonal transformations of signals using parallel processing on various levels. Currently, attention is paid to support parallel computations at the level of operations. To solve this problem is to use a non-positional modular codes. However, these codes allow not only to improve the performance of the special processor, but is able to detect and correct errors occurring due to malfunctions and equipment failures. Develop an effective method to find the location and depth error based on the use of modular codes is an important task. The work considers the application of polynomial system classes deductions for error correction using the procedure of system expansion bases.

Keywords: modular codes, error correction, polynomial residue number system

Современные вычислительные устройства имеют довольно сложную структуру. Увеличение обработки данных в реальном масштабе времени привело к использованию параллельной обработки. Параллельные вычисления широко применяются при цифровой обработке сигналов [6-8]. Применение параллельной обработки сигналов приводит к снижению надежности устройств, поэтому снижение отказов систем к сбоям является актуальной задачей. Данная задача наиболее эффективна за счет применения полиномиальной системы классов вычетов (ПСКВ) для обнаружения и коррекции ошибок при меньших временных затратах [3].

Цель исследования

Сохранение работоспособного состояния вычислительных устройств определяется быстротой и глубиной определения ошибок. Целью исследования является расширение функциональных возможностей устройства, то есть проведения коррекции

ошибок кодом полиномиальной системы классов вычетов, на основе использования операций расширения оснований.

Материалы и методы исследования

Особенность ПСКВ заключается в том, что независимость обработки информации по основаниям ПСКВ позволяет не только повысить скорость и точность обработки, но также и обеспечить обнаружение и коррекцию ошибок в процессе функционирования вычислительного устройства [1-3]. В ПСКВ в качестве оснований системы используются неприводимые полиномы $p_i(x)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, любой полином $A(x)$, удовлетворяющий

$$\deg A(x) < \deg P_{\text{раб}}(x), \quad (1)$$

где $P_{\text{раб}}(x) = \prod_{i=1}^n p_i(x)$ – рабочий диапазон системы, $\deg P_{\text{раб}}(x)$ – степень полинома, можно однозначно представить в виде набора остатков

$$A(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)), \quad (2)$$

где $\alpha_i(x) \equiv A(x) \bmod p_i(x); i = 1, 2, \dots, n$.

Для обнаружения и исправления однократных ошибок в модулярном коде полинома $A(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x))$ вводят два контроль-

ных основания $p_{n+1}(x)$ и $p_{n+2}(x)$, которые удовлетворяют условию

$$\deg p_{n+1}(x) + \deg p_{n+2}(x) \geq \deg p_n(x) + \deg p_{n-1}(x), \quad (3)$$

Наличие двух контрольных основания позволя-ет определить местоположение ошибки и ее глубину в коде ПСКВ [4, 5, 8].

Возникновение ошибки в непозиционной ко-довой конструкции $A(z)$ переводит ее из подмножества разрешенных комбинаций в подмножество запрещен-ных. Согласно китайской теореме об остатках (КТО) значение ошибочного полинома $A^*(z)$ равно

$$\begin{aligned} A^*(z) &= \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i(z) \cdot B_i(z) \bmod P_{\text{пол}}(z) = \\ &= A(z) + \left| \Delta \alpha_j(z) \cdot B_j \right|_{P_{\text{пол}}(z)}^+, \end{aligned} \quad (4)$$

где $P_{\text{пол}}(z) = \prod_{i=1}^{n+2} p_i(z)$ – полный диапазон кода ПСКВ;

$\Delta \alpha_j(z)$ – глубина ошибки по j -ому основанию кода ПСКВ; $B_j(z)$ – ортогональный базис j -го основания ПСКВ; $j = 1, 2, \dots, n+2$.

Анализ выражения (4) показывает, что местопо-ложение ошибочного полинома $A^*(z)$ относительно рабочего диапазона $P_{\text{раб}}(z)$ определяется величиной второго слагаемого.

Рассмотрим алгоритм перевода из безизбыточ-ного полиномиального модулярного кода в позицион-ный код согласно КТО, имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^*(z) &= \left| A \right|_{P_{n+1}(z)}^+ = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) m_i(z) \right|_{P_{n+1}(z)}^+ \cdot P_i(z) \Big|_{P_{n+1}(z)}^+ = \\ &= \left| \alpha_1(z) m_1(z) \right|_{P_1(z)}^+ \cdot P_1(z) \Big|_{P_{n+1}(z)}^+ + \left| \alpha_2(z) m_2(z) \right|_{P_2(z)}^+ \cdot P_2(z) \Big|_{P_{n+1}(z)}^+ + \dots + \\ &+ \left| \alpha_n(z) m_n(z) \right|_{P_n(z)}^+ \cdot P_n(z) \Big|_{P_{n+1}(z)}^+ . \end{aligned} \quad (7)$$

Второй контрольный остаток $\alpha_{n+2}^*(z)$ по основанию $p_{n+2}(z)$ определяется

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2}^*(z) &= \left| A \right|_{P_{n+2}(z)}^+ = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) m_i(z) \right|_{P_{n+2}(z)}^+ \cdot P_i(z) \Big|_{P_{n+2}(z)}^+ = \\ &= \left| \alpha_1(z) m_1(z) \right|_{P_1(z)}^+ \cdot P_1(z) \Big|_{P_{n+2}(z)}^+ + \left| \alpha_2(z) m_2(z) \right|_{P_2(z)}^+ \cdot P_2(z) \Big|_{P_{n+2}(z)}^+ + \dots + \\ &+ \left| \alpha_n(z) m_n(z) \right|_{P_n(z)}^+ \cdot P_n(z) \Big|_{P_{n+2}(z)}^+ . \end{aligned} \quad (8)$$

После этого вычисленные остатки $\alpha_{n+1}^*(z)$ и $\alpha_{n+2}^*(z)$ складываются по моду-лю два с остатками $\alpha_{n+1}(z)$ и $\alpha_{n+2}(z)$, кото-рые входят в состав комбинации кода ПСКВ $A(z) = (\alpha_1(z), \alpha_2(z), \dots, \alpha_{n+1}(z), \alpha_{n+2}(z))$. В резуль-тате получается синдром ошибки, который определит местоположение и глубину ошибки в коде

$$\begin{cases} S_1 = \alpha_{n+1}^*(z) + \alpha_{n+1}(z) \\ S_2 = \alpha_{n+2}^*(z) + \alpha_{n+2}(z) \end{cases} \quad (9)$$

Если полученный синдром будет равен нулю, то это означает, что код ПСКВ не содержит ошибки. Если синдром будет отличен от нуля, то это будет оз-начать, что код ПСКВ содержит ошибку.

$$\begin{aligned} A(z) &= \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) \cdot B_i(z) \right|_{P_{\text{раб}}(z)}^+ = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) \cdot B_i(z) - r_A(z) \cdot P_{\text{пол}}(z), \end{aligned} \quad (5)$$

где $B_i(z) = m_i(z) P_i(z)$ – ортогональный базис; $m_i(z)$ – вес ортогонального базиса; $P_i(z) = \prod_{j=1}^n p_j(z)$; $r_A(z)$ – ранг кода ПСКВ.

Воспользуемся определением ортогональных ба-зисов, тогда выражение (5) можно представить в виде

$$A(z) = \sum_{i=1}^n \left| \alpha_i(z) \cdot m_i(z) \right|_{P_i(z)}^+ \cdot P_i(z) \quad (6)$$

Умножение остатка на вес ортогонального бази-са выполняется по модулю $p_i(z)$, что позволяют отка-заться от вычисления ранга $r_A(z)$ при использовании китайской теоремы об остатках при переводе к пози-ционному коду.

Чтобы осуществить поиск и коррекцию ошибки в коде ПСКВ на основе расширения системы осно-ваний необходимо, используя остатки по рабочим основаниям $(\alpha_1(z), \dots, \alpha_n(z))$, вычислитель остатки по контрольным основаниям $p_{n+1}(z)$ и $p_{n+2}(z)$.

Тогда для вычисления первого контрольного остатка $\alpha_{n+1}^*(z)$ по основанию $p_{n+1}(z)$ используем следующее выражение

Результаты исследования и их обсуждение

Пусть задано поле Галуа $GF(2^4)$, в ко-тором определены информационные ос-нования $p_1(z) = z+1$, $p_2(z) = z^2 + z+1$, $p_3(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z+1$, расширяем систе-му оснований за счет введения двух кон-трольных оснований $p_4(z) = z^4 + z^3+1$ и $p_5(z) = z^4 + z+1$. В этом случае

$$P_{\text{раб}}(z) = \prod_{i=1}^4 p_i(z) = z^7 + z^6 + z^5 + z^2 + z + 1.$$

При этом полный диапазон составляет $P_{\text{полн}}(z) = z^{15} + 1$. Тогда контрольный полином

$$P_{\text{конт45}}(z) = z^8 + z^7 + z^5 + z^4 + z^3 + z + 1.$$

Определим значения рабочих оснований $P_i(z)$ и $m_i(z)$:

$$P_1(z) = p_2(z)p_3(z) = z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1,$$

$$P_2(z) = p_1(z)p_3(z) = z^5 + 1,$$

$$P_3(z) = p_1(z)p_2(z) = z^3 + 1.$$

Тогда веса ортогональных базисов равны $m_1(z) = 1$; $m_2(z) = z + 1$; $m_3(z) = z^2 + z + 1$.

Следовательно, ортогональные базисы $B_i(z)$ соответственно равны

$$B_1(z) = m_1(z)P_1(z) = z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1;$$

$$B_2(z) = m_2(z)P_2(z) = z^6 + z^5 + z + 1;$$

$$B_3(z) = m_3(z)P_3(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

Воспользуемся полиномом $A(z) = z^6$, который представляется как $A(z) = (1, 1, z)$.

Расширяем систему оснований за счет $p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$ и $p_5(z) = z^4 + z + 1$.

Первое основания расширения системы $p_{k+1}(z) = p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$. Вычислим значения $P_i(z) \bmod p_5(z)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |P_1(z)|_{p_4(z)}^+ &= |z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1|_{z^4+z^3+1}^+ = \\ &= z^3 + z + 1, \end{aligned}$$

$$|P_2(z)|_{p_4(z)}^+ = |z^5 + 1|_{z^4+z^3+1}^+ = z^3 + z^2,$$

$$|P_3(z)|_{p_4(z)}^+ = |z^3 + 1|_{z^4+z^3+1}^+ = z^3 + 1.$$

Определим произведения

$$|\alpha_1(z)m_1(z)|_{p_1(z)}^+ = |1 \cdot 1|_{z+1}^+ = 1,$$

$$|\alpha_2(z)m_2(z)|_{p_2(z)}^+ = |1 \cdot (z+1)|_{z^2+z+1}^+ = z + 1,$$

$$\begin{aligned} |\alpha_3(z)m_3(z)|_{p_3(z)}^+ &= |z(z^2 + z + 1)|_{z^4+z^3+z^2+z+1}^+ = \\ &= z^3 + z^2 + z. \end{aligned}$$

Подставляем полученные значения в выражение (7) и получаем

$$\begin{aligned} \alpha_4(z) &= |1 \cdot (z^3 + z + 1)|_{z^4+z^3+1}^+ + |(z+1)(z^3 + z^2)|_{z^4+z^3+1}^+ + |(z^3 + z^2 + z)(z^3 + 1)|_{z^4+z^3+1}^+ = \\ &= z^3 + z^2 + z + 1. \end{aligned}$$

Результат расширения по основанию $p_{n+1}(z) = p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$ получили остаток $\alpha_4(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Проведем проверку и определим остаток исходного полинома

$$\alpha_4(z) = |A(z)|_{p_4(z)}^+ = |z^6|_{z^4+z^3+1}^+ = z^3 + z^2 + z + 1.$$

Второе основание расширения

$$p_{n+2}(z) = p_5(z) = z^4 + z + 1.$$

Вычислим значения $P_i(z) \bmod p_5(z)$. Тогда имеем

$$|P_1(z)|_{p_5(z)}^+ = |z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1|_{z^4+z+1}^+ = z,$$

$$|P_2(z)|_{p_5(z)}^+ = |z^5 + 1|_{z^4+z+1}^+ = z^2 + z + 1,$$

$$|P_3(z)|_{p_5(z)}^+ = |z^3 + 1|_{z^4+z+1}^+ = z^3 + 1.$$

Определим произведение

$$|\alpha_i(z) \cdot m_i(z)|_{p_i(z)}^+.$$

Они соответственно равны

$$|\alpha_1(z) \cdot m_1(z)|_{p_1(z)}^+ = |1 \cdot 1|_{z+1}^+ = 1,$$

$$|\alpha_2(z) \cdot m_2(z)|_{p_2(z)}^+ = |1 \cdot (z+1)|_{z^2+z+1}^+ = z + 1,$$

$$\begin{aligned} |\alpha_3(z) \cdot m_3(z)|_{p_3(z)}^+ &= |z(z^2 + z + 1)|_{z^4+z^3+z^2+z+1}^+ = \\ &= z^3 + z^2 + z. \end{aligned}$$

Подставляем полученные значения в выражение (8)

$$\alpha_5(z) = |1 \cdot z|_{z^4+z+1}^+ + |(z+1)(z^2 + z + 1)|_{z^4+z+1}^+ + |(z^3 + z^2 + z)(z^3 + 1)|_{z^4+z+1}^+ = z^3 + z^2.$$

Результат расширения по основанию $p_{n+2}(z) = p_5(z) = z^4 + z + 1$ – остаток $\alpha_5(z) = z^3 + z^2$. Проведем проверку и определим остаток исходного полинома

$$\alpha_5(z) = |A(z)|_{p_5(z)}^+ = |z^6|_{z^4+z+1}^+ = z^3 + z^2.$$

Таким образом, расширенная комбинация избыточного кода ПСКВ будет иметь вид

$$A(z) = (1, 1, z, z^3 + z^2, z^3 + z^2 + z + 1).$$

Если на вход устройства и обнаружения ошибки, использующего разработанный алгоритм расширения системы оснований, поступит $A(z) = (1, 1, z, z^3 + z^2, z^3 + z^2 + z + 1)$, то синдром ошибки будет равен

$$\begin{aligned}\delta_2(z) &= \alpha_4(z) + \alpha_4^*(z) = (z^3 + z^2 + z + 1) + (z^3 + z^2 + z + 1) = 0; \\ \delta_1(z) &= \alpha_5(z) + \alpha_5^*(z) = (z^3 + z^2) + (z^3 + z^2) = 0.\end{aligned}$$

Так как синдром ошибки равен нулю, то код ПСКВ не содержит ошибки.

Рассмотрим ситуацию, когда проверяемая комбинация ПСКВ содержит ошибку по первому основанию и ее глубина равна $\Delta\alpha(z)=1$. Тогда значение первого остатка равно $\alpha_1^*(z) = \alpha_1(z) + \Delta\alpha_1(z) = 1 + 1 = 0$. Ошибочная комбинация модулярного кода ПСКВ имеет вид

$$A^*(z) = (0, 1, z, z^3 + z^2, z^3 + z^2 + z + 1).$$

Определим $|\alpha_i(z) \cdot m_i(z)|_{p_i(z)}^+$, для данной ошибочной комбинации кода ПСКВ. Получаем

$$|\alpha_1^*(z)m_1(z)|_{p_1(z)}^+ = 0,$$

$$|\alpha_2(z)m_2(z)|_{p_2(z)}^+ = z + 1,$$

$$|\alpha_3(z)m_3(z)|_{p_3(z)}^+ = z^3 + z^2 + z.$$

Вычислим первый контрольный остаток, подставив значения в выражение (7)

$$\alpha_4^*(z) = |0 \cdot (z^3 + z + 1)|_{z^4+z^3+1}^+ + |(z+1)(z^3 + z^2)|_{z^4+z^3+1}^+ + |(z^3 + z^2 + z)(z^3 + 1)|_{z^4+z^3+1}^+ = z^2.$$

Результатом расширения по модулю $p_{n+1}(z) = p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$ является $\alpha_4^*(z) = z^2$. Вычислим второй контрольный остаток, подставив значения в выражение (8)

$$\alpha_5^*(z) = |0 \cdot z|_{z^4+z+1}^+ + |(z+1)(z^2 + z + 1)|_{z^4+z+1}^+ + |(z^3 + z^2 + z)(z^3 + 1)|_{z^4+z+1}^+ = z^3 + z^2 + z.$$

Результатом расширения по модулю $p_{n+2}(z) = p_5(z) = z^4 + z + 1$ является остаток $\alpha_5^*(z) = z^3 + z^2 + z$.

Выполним проверку комбинации путем вычисления синдрома ошибки, имеем

$$\begin{aligned}S_1(z) &= \alpha_4(z) + \alpha_4^*(z) = (z^3 + z^2 + z + 1) + (z^2) = z^3 + z + 1; \\ S_2(z) &= \alpha_5(z) + \alpha_5^*(z) = (z^3 + z^2) + (z^3 + z^2 + z) = z.\end{aligned}$$

Проверяемая комбинация содержит ошибки, так как синдром ошибки отличен от нуля. В таблице приведены значения глубины и местоположения ошибки в коде ПСКВ по рабочим основаниям и соответствующего им синдрома ошибки $S_1(z)$ и $S_2(z)$. Данные в таблице приведены в шестнадцатеричной системе счисления. По значению синдрома

ошибки определяем, что ошибка произошла по первому основанию $p_1(z) = z + 1$, а ее глубина равна $\Delta\alpha_1(z) = 1$. Значит, вектор ошибки будет равен $e(z) = (1, 0, 0, 0, 0)$.

Для коррекции ошибки необходимо данный вектор ошибки сложить с ошибочной комбинацией кода ПСКВ. Имеем

$$\begin{aligned}A(z) &= A^*(z) + e(z) = (0, 1, z, z^3 + z^2, z^3 + z^2 + z + 1) + (1, 0, 0, 0, 0) = \\ &= (1, 1, z, z^3 + z^2, z^3 + z^2 + z + 1)\end{aligned}$$

Глубина и местоположение ошибки в коде ПСКВ по $S_1(z)$ и $S_2(z)$

Основание	Глубина	$S_1(z)$	$S_2(z)$
$p_1(z) = z + 1$	1	B	2
$p_2(z) = z^2 + z + 1$	1	7	9
	2	A	7
	3	D	E
$p_3(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$	1	E	D
	2	1	F
	3	F	2
	4	6	B
	5	8	6
	6	7	4
	7	9	9
	8	C	5
	9	2	8
	A	D	A
	B	3	7
	C	A	E
	D	4	3
	E	B	1
	F	5	C

Если ошибка произойдет по первому контрольному основанию $p_1(z) = z + 1$, то значение первой составной синдрома $S_1(z)$ будет показывать глубину ошибки, а значение $S_2(z)$ будет равняться нулю.

Если ошибка произойдет по второму контрольному основанию $p_2(z) = z^2 + z + 1$, то значение второй составной синдрома $S_2(z)$ будет показывать глубину ошибки, а значение первой составляющей синдрома $S_1(z)$ будет равняться нулю.

Заключение

В статье проведено описание нового устройства коррекции ошибок в модулярном коде на основе расширения системы оснований. Представлены результаты применения данного устройства в кодах ПСКВ, за счет добавления двух контрольных оснований. Проведенные исследования показали, что при использовании двух контрольных оснований код ПСКВ исправляет все однократные ошибки при меньших схемных затратах.

Список литературы

1. Калмыков И.А., Тимошенко Л.И., Лободин М.В., Сагдеев А.К. Реализация ортогональных преобразований

сигналов в расширенных полях Галуа // Современные наукоемкие технологии. 2006. № 4. С. 54-57.

2. Калмыков И.А., Саркисов А.Б., Макарова А.В. Технология цифровой обработки сигналов с использованием модулярного полиномиального кода // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 12 (149). С. 234-241.

3. Калмыков И.А., Саркисов А.Б., Яковлева Е.М., Калмыков М.И. Модулярный систолический процессор цифровой обработки сигналов с реконфигурируемой структурой // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. – Ставрополь. – 2013. – № 2. – С. 30-35.

4. Саркисов А.Б., Калмыков М.И., Яковлева Е.М. Параллельные технологии цифровой обработки сигналов на основе непозиционных модулярных кодов // XIII Всероссийская научная конференция «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» – Нижний Новгород. – 2013. – С. 236-241.

5. Червяков Н.И., Калмыков И.А., Щелкунова Ю.О., Шилов А.А., Бережной В.В. Нейросетевая реализация в ПСКВ операций ЦОС повышенной разрядности // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2004. № 5-6. С. 94-100.

6. Чипига А.Ф., Калмыков И.А. Структура нейронной сети для реализации цифровой обработки сигналов повышенной разрядности // Наука. Инновации. Технологии. 2004. Т. 38. С. 46.

7. Kalmykov I.A., Katkov K.A., Timoshenko L.I., Dunin A.V., Gish T.A. Application of modular technologies in the large-scale analysis of signals // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2015. T. 80. № 3. С. 391-400.

8. Mohan P.V. Residue Number Systems. Algorithms and Architectures. Springer. 2002.