УДК 517.95

ОДНА ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА, СОДЕРЖАЩЕГО МАЛЫЙ ПАРАМЕТР В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Захарова И.В.

ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», Иркутск, e-mail: zair@math.isu.ru

Рассмотрена задача Дирихле в полупространстве для дифференциального уравнения в частных производных с переменным коэффициентами эллиптического типа с малым параметром при старшей производной. Последовательно строится решение предельной задачи (задачи Коши для уравнения параболического типа), строится фундаментальное решение и решается исходная задача Дирихле. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ фундаментальное решение уравнения эллиптического типа, содержащего малый параметр в главной части, переходит в фундаментальное решение предельного ($\varepsilon = 0$) уравнения параболического типа. С помощью предельного перехода установлено, что построенное решение задачи Дирихле в полупространстве для уравнения эллиптического типа, содержащего малый параметр в главной части, при $\varepsilon \to 0$ стремится регулярным образом к решению предельной задачи, а именно к решению задачи Коши для уравнения параболического типа.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, малый параметр, фундаментальное решение, задача Дирихле, задача Коши, функция Леви

ONE PROBLEM FOR THE EQUATION WITH PARTIAL DERIVATIVES OF AN ELLIPTIC TYPE CONTAINING A SMALL PARAMETER IN THE PRINCIPAL PART

Zakharova I.V.

Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: zair@math.isu.ru

The Dirichlet problem in a half-space for a partial differential equation with variable coefficients of elliptic type with a small parameter with the highest derivative is considered. The solution of the limit problem (the Cauchy problem for an equation of parabolic type) is consecutively constructed, a fundamental solution is constructed, and the original Dirichlet problem is solved. It is shown that when $\varepsilon \to 0$ a fundamental solution of an equation of elliptic type containing a small parameter in the principal part becomes a fundamental solution of the limiting ($\varepsilon = 0$) equation of parabolic type. With the help of the limit transition it is established that the solution of the Dirichlet problem in a half-space for an equation of elliptic type containing a small parameter in the principal part, $\varepsilon \to 0$ tends in a regular way to the solution of the limit problem, namely, to the solution of the Cauchy problem for an equation of parabolic type.

Keywords: singularly perturbed problem, small parameter, fundamental solution, Dirichlet problem, Cauchy problem, Levy function

В том случае, когда некоторое явление моделируется дифференциальным уравнением, влияние малых параметров на данное явление сводится к изучению зависимости решений уравнения от малых параметров. Сложная ситуация возникает тогда, когда малые параметры содержатся в коэффициентах при старших производных, а при обращении в нуль этих параметров уравнение вырождается. Для уравнений с частными производными обращение в нуль некоторых параметров в главной части уравнения может приводить не к обращению в нуль всей главной части уравнения, а к изменению типа уравнения. Т.к. для уравнений в частных производных для каждого типа уравнений корректны свои задачи, то представляет интерес исследование перехода решения некоторой задачи для уравнения с малым параметром в решение для предельного уравнения. В работе [3] приведен ряд примеров, иллюстрирующих эффекты, возникающие при предельном переходе в уравнении с частными производными.

Рассмотрим задачу Дирихле в полупространстве для уравнения эллиптического типа в следующей постановке:

$$a(x,y)U_{xx} + 2b(x,y)U_{xy} + \\ +d(x,y)U_{yy} + \varepsilon U_{tt} - cU_t = 0, \quad (1)$$

$$U(x,y,0,\varepsilon) = f(x,y), \quad (2)$$

ε – малый параметр, $\varepsilon > 0$, $f(x,y)$ – непрерывная в некоторой области $D^+ = \{t \ge 0\}$, $f(x,y)$ $U(x,y,t,\varepsilon)$ – стремятся к нулю на бесконечности, с const, коэффициенты $a(x,y), b(x,y), d(x,y)$ ограничены в полупространстве $t > 0$ и там же удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ. Это означает, что отношения:

$$\frac{\left|a(X)-a\left(X^0\right)\right|}{\left|X-X^0\right|},\frac{\left|b(X)-b\left(X^0\right)\right|}{\left|X-X^0\right|},$$

$$\frac{\left|d(X)-d\left(X^0\right)\right|}{\left|X-X^0\right|},$$

ограничены сверху при любых X и X^0, принадлежащих полупространству $t > 0$.

Предельная задача

Прежде, чем построить решение задачи (1), (2), в уравнении (1) положим $\varepsilon = 0$ и рассмотрим соответствующее ему предельное уравнение:

$$L_0W \equiv a(x,y)W_{xx} + 2b(x,y)W_{xy} + \\ +d(x,y)W_{yy} - cW_t = 0. \qquad (3)$$

Заметим, что уравнение (3) является уравнением параболического типа. Т.е. при $\varepsilon = 0$ порядок уравнения не понизился, но изменился тип уравнения.

Обозначим $X = (x,y)$, $\Xi = (\xi_1,\xi_2)$. Норму определим равенством $|X| = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$. Будем предполагать, что оператор удовлетворяет следующим условиям:

1. оператор L_0 – равномерно параболический в

$$\Omega \equiv \bar{D}\times[T_0,T_1] \equiv \left\{(X,t): X\in\bar{D}, T_0\le t\le T_1\right\};$$

$$T_0 \ge 0; T_1 \le \infty,$$

D – неограниченная область $\left(D\in R^2\right)$, т.е. существуют положительные постоянные λ_0 и λ_1 такие, что для любого вещественного вектора Ξ

$$\lambda_0|\Xi|^2 \le a(\Xi)\xi_1^2 + 2b(\Xi)\xi_1\xi_2 + d(\Xi)\xi_2^2 \le \lambda_1|\Xi|^2$$

для всех $(X,t)\in\Omega$.

2. коэффициенты L_0 – непрерывные функции в Ω и для всех $X\in D$, $X^0\in D$, и некоторого α из интервала $0<\alpha<1$, существует постоянная A, такая, что

$$\left|a(X)-a\left(X^0\right)\right| \le A\left|X-X^0\right|^{\alpha},$$

$$\left|b(X)-b\left(X^0\right)\right| \le A\left|X-X^0\right|^{\alpha},$$

$$\left|d(X)-d\left(X^0\right)\right| \le A\left|X-X^0\right|^{\alpha}.$$

Согласно работе [2], фундаментальное решение уравнения (3) построим методом параметрикса. Для уравнения (3) функция параметрикса имеет вид:

$$Z(x,y,t,\xi_1,\xi_2,\tau) = \frac{c}{4(t-\tau)\pi\sqrt{ad-b^2}}\cdot\exp\left(-\frac{c\left(d(x-\xi_1)^2 - 2b(x-\xi_1)(y-\xi_2) + a(y-\xi_2)^2\right)}{4(t-\tau)\left(ad-b^2\right)}\right). \qquad (4)$$

Для любых фиксированных (Ξ,τ) функция $Z(X,t;\Xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\bar{L}_0W \equiv a(\xi_1,\xi_2)W_{xx} + 2b(\xi_1,\xi_2)W_{xy} + \\ +d(\xi_1,\xi_2)W_{yy} - cW_t = 0.$$

Чтобы построить фундаментальное решение $\Gamma(X,t;\Xi,\tau)$ уравнения (3), будем считать $\bar{L}_0$ «первым приближением» к L_0 и рассматривать Z, как «главную часть» фундаментального решения этого уравнения. Фундаментальное решение $\Gamma(X,t;\Xi,\tau)$ будем искать в виде

$$\Gamma(X,t;\Xi,\tau) = Z(X,t;\Xi,\tau) + \\ +\int_\tau^t\int_D Z(X,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\Xi,\tau)\,d\eta\, d\sigma, \qquad (5)$$

где Φ определяется из условия, что $\Gamma(X,t;\Xi,\tau)$ должно удовлетворять уравнению $L_0W = 0$. Этот процесс и называется методом параметрикса. Тогда согласно [2] имеет место соотношение:

$$\Phi(X,t;\Xi,\tau) = \Lambda Z(X,t;\Xi,\tau) = \\ = \int_\tau^t\int_D \Lambda Z(X,t;z,\sigma)\Phi(z,\sigma;\Xi,\tau)\,dz\,d\sigma, \qquad (6)$$

где

$$\Lambda Z(X,t;z,\sigma) = \frac{1}{c}\left(a(x,y)-a(z_1,z_2)\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}Z(x,y,t;z_1,z_2,\sigma) + \\ +\frac{1}{c}\left(2b(x,y)-2b(z_1,z_2)\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}Z(x,y,t;z_1,z_2,\sigma) + \\ +\frac{1}{c}\left(d(x,y)-d(z_1,z_2)\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}Z(x,y,t;z_1,z_2,\sigma). \qquad (7)$$

Таким образом, для каждых фиксированных (Ξ,τ) функция $\Phi(X,t;\Xi,\tau)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра с особым ядром $\Lambda Z(X,t;z,\sigma)$. В [2] показано, что особенность ядра интегрируема, а уравнение (6) имеет решение вида:

$$\Phi(X,t;\Xi,\tau)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(\Lambda Z)_{\nu}(X,t;\Xi,\tau), \quad (8)$$

где

$$(\Lambda Z)_1=\Lambda Z$$

и

$$(\Lambda Z)_{\nu+1}(X,t;\Xi,\tau)=$$
$$=\int_{\tau}^{t}\int_{D}(\Lambda Z(X,t;z,\sigma))(\Lambda Z)_{\nu}(z,\sigma;\Xi,\tau)dzd\sigma. \quad (9)$$

Рассмотрим предельную задачу, соответствующую задаче (1), (2):

$$a(x,y)W_{xx}+2b(x,y)W_{xy}+$$
$$+d(x,y)W_{yy}-cW_t=0, \quad (10)$$

$$W(x,y,0)=f(x,y). \quad (11)$$

Задача (10), (11) есть задача Коши в полупространстве для уравнения параболического типа. Согласно [1], её решение даётся формулой:

$$W(X,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(X,t;\Xi,0)f(\Xi)d\Xi, \quad (12)$$

где Γ – фундаментальное решение, определяемое (5).

$$X\neq Y$$

Решение задачи Дирихле (1), (2)

В уравнении (1) введём новую неизвестную функцию $V(x,y,t,\varepsilon)$ по формуле:

$$U(x,y,t,\varepsilon)=V(x,y,t,\varepsilon)\exp\left(\frac{c(t-\tau)}{2\varepsilon}\right). \quad (13)$$

В результате получим уравнение:

$$a(x,y)V_{xx}+2b(x,y)V_{xy}+$$
$$+d(x,y)V_{yy}+\varepsilon V_{tt}-\frac{c^2}{4\varepsilon}V=0. \quad (14)$$

Для того чтобы построить фундаментальное решение уравнения (14) в полупространстве $t>0$, необходимо знать функцию Леви для этого уравнения. Согласно определению функции Леви, данному в работе [1], надо построить функцию $\tilde{L}(X,Y)$ непрерывную вместе со своими производными первого и второго порядка включительно по x, y, t, когда X и Y изменяются в некоторой области C и , и чтобы она при некотором $\lambda>0$ удовлетворяла оценкам вида:

$$\tilde{L}-H=O(r^{\lambda-1}),$$
$$\frac{\partial(\tilde{L}-H)}{\partial x},\frac{\partial(\tilde{L}-H)}{\partial y},\frac{\partial(\tilde{L}-H)}{\partial t}=O(r^{\lambda-2}),$$
$$\frac{\partial^2(\tilde{L}-H)}{\partial x\partial y}=O(r^{\lambda-3}) \quad (15)$$

равномерно в каждой замкнутой области, содержащейся в C.

Здесь r – расстояние между точками X и Y, $X=(x,y,t)$, $Y=(y_1,y_2,\tau)$,

$$H(X,Y)=\frac{1}{\omega\sqrt{\varepsilon(ad-b^2)}}\left(\frac{d(y_1,y_2)}{ad-b^2}(x-y_1)^2-\frac{2b(y_1,y_2)}{ad-b^2}(x-y_1)(y-y_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{a(y_1,y_2)}{ad-b^2}(y-y_2)^2+\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)^2\right)^{-\frac{1}{2}},\ \ \omega=\frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)}.$$

Следуя методике работы [1], построим функцию $\tilde{L}(X,Y)$ в виде:

$$\tilde{L}(X,Y,\varepsilon)=\frac{c^2}{4\sqrt{2\pi^3(ad-b^2)}\varepsilon}K_{1/2}\left[\frac{c}{2\varepsilon\sqrt{ad-b^2}}\left(\varepsilon d(y_1,y_2)(x-y_1)^2-\right.\right.$$
$$-2\varepsilon b(y_1,y_2)(x-y_1)(y-y_2)+\varepsilon a(y_1,y_2)(y-y_2)^2+$$
$$\left.\left.+\left(a(y_1,y_2)d(y_1,y_2)-b^2(y_1,y_2)\right)(t-\tau)^2\right)^{1/2}\right],$$

где $K_{1/2}$ – функция Макдональда, которая есть $O(t^{-1})$ при $|t|<1$ и $O(e^{-at})$, где $a<1$, при $t>1$.

Функция $\tilde{L}(X,Y)$ есть функция Леви для уравнения (14) и для достаточно больших r справедливы оценки:

$$\tilde{L}=O\left(e^{-pr}\right),\quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x}=O\left(e^{-pr}\right),$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial y}=O\left(e^{-pr}\right),\quad \frac{\partial^2\tilde{L}}{\partial x\partial y}=O\left(e^{-pr}\right).$$

С учетом замены (13), получим функцию Леви для уравнения (1):

$$L(X,Y,\varepsilon)=\frac{c}{4\pi}\left(\varepsilon d\left(x-y_1\right)^2-2\varepsilon b\left(x-y_1\right)\left(y-y_2\right)+\varepsilon a\left(y-y_2\right)^2+\left(ad-b^2\right)(t-\tau)^2\right)^{-1/2}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(\left(c\sqrt{ad-b^2}\,(t-\tau)-c\left[\varepsilon d\left(x-y_1\right)^2-2\varepsilon b\left(x-y_1\right)\left(y-y_2\right)+\varepsilon a\left(y-y_2\right)^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(ad-b^2\right)(t-\tau)^2\right]^{1/2}\right)\Big/2\varepsilon\sqrt{ad-b^2}\right).$$

Переходя к пределу, в последнем выражении, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}L(X,Y,\varepsilon)=\frac{c}{4\pi\sqrt{ad-b^2}\,(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{c\left(d\left(x-y_1\right)^2-2b\left(x-y_1\right)\left(y-y_2\right)+a\left(y-y_2\right)^2\right)}{4(t-\tau)\left(ad-b^2\right)}\right).\quad(16)$$

Как видим, оно совпадает с формулой (4).

Следуя работе [1], фундаментальное решение для (14) будем искать как решение интегрального уравнения:

$$G(X,Y,\varepsilon)=L(X,Y,\varepsilon)+\int_D G(X,\varsigma,\varepsilon)K(\varsigma,Y,\varepsilon)d\varsigma,\quad(17)$$

которое, в свою очередь, имеет решение вида:

$$G(X,Y,\varepsilon)=L(X,Y,\varepsilon)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_D L(X,\varsigma,\varepsilon)K^{(n)}(\varsigma,Y,\varepsilon)d\varsigma,\quad(18)$$

где

$$K^0(X,Y,\varepsilon)=K(X,Y,\varepsilon),$$

$$K^{(n)}(X,Y,\varepsilon)=\int_D K(X,\varsigma,\varepsilon)K^{(n-1)}(\varsigma,Y,\varepsilon)d\varsigma,$$

$$K(X,Y,\varepsilon)=\frac{a(x,y)-a(y_1,y_2)}{c}\frac{\partial^2\tilde{L}}{\partial x^2}+\frac{2b(x,y)-2b(y_1,y_2)}{c}\frac{\partial^2\tilde{L}}{\partial x\partial y}+\frac{d(x,y)-d(y_1,y_2)}{c}\frac{\partial^2\tilde{L}}{\partial y^2}-\frac{c}{4\varepsilon}\tilde{L}.$$

Проведя несложные, но достаточно громоздкие преобразования, с учетом вида функции $\tilde{L}$, получим, что:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c}{4\varepsilon}\tilde{L}=0.$$

Далее, принимая во внимание выражение (7) получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}K(X,Y)=\Lambda Z(X,t;z,\sigma).\quad(19)$$

А с учетом замены (13) и равенств (16), (19), получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}G(X,Y,\varepsilon)=\Gamma(X,t;\Xi,\tau).\quad(20)$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$U(X,\varepsilon)=-2\int_{\partial D}\Im G(X,\eta)\varsigma(\eta)d_\eta\sigma,\quad(21)$$

где $G(X,Y)$ – главное фундаментальное решение уравнения (1). Согласно [1], функция $U(X,\varepsilon)$, заданная формулой (21), будет являться регулярным решением задачи (1), (2) в том и только том случае, если для ξ из ∂D

$$\varsigma(\xi)=2\int_{\partial D}\Im G(\xi,\eta)\varsigma(\eta)d_{\eta}\sigma+f(\xi). \quad (22)$$

С учетом того, что вектор нормали v, выходящий из полупространства D^{+}, имеет направление, противоположное оси τ, оператор $\partial\Im$ в формуле (22) в данном конкретном случае будет иметь вид:

$$\Im G=-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial\tau}+(1+c)G. \quad (23)$$

Принимая во внимание выражения (20), (23) получим, что ядро интегрального уравнения (22) при $t = 0$ и при $\varepsilon \to 0$ равно 0.

Таким образом, искомое решение задачи (1), (2) примет вид:

$$U(X,\varepsilon)=-2\int_{\partial D}\Im G(X,\eta)f(\eta)d_{\eta}\sigma. \quad (24)$$

Выполнив вычисления под знаком интеграла в (24) с учетом выражений (17), (20), (23), получим, что:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}U(X,\varepsilon)=W(X,t).$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема. Если в уравнении (1) $c > 0$, а остальные коэффициенты ограничены в полупространстве $t > 0$ и удовлетворяют в этом полупространстве условию Гёльдера с показателем λ, то решение задачи Дирихле для уравнения (1) в полупространстве $t > 0$ при $\varepsilon \to 0$ стремиться к решению задачи Коши для соответствующего предельного уравнения, которое получается из (1), если в нем положить $\varepsilon = 0$.

Список литературы

1. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957. – С. 54-85.

2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – С. 11-41.

3. Янушаускас А. О зависящих от малого параметра уравнениях с частными производными // Краевые задачи: Сб. науч. тр. – Иркутск: Иркут. ун-т, 1990. – С. 94-103.