УДК 519.63

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЁМКОСТЬЮ

Нахушева Ф.М., Куважуква Р.Х., Максидова З.Т.

*ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова»,
Нальчик, e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru*

Работа посвящена рассмотрению уравнения влагопереноса с краевыми условиями третьего рода, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Подобные условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью, при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоёмкость. Аналогичные условия возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка. Известно, что уравнение Аллера и другие уравнения переноса влаги, основанные на диффузионной модели, предполагают бесконечную скорость распространения возмущения. Уравнение Лыкова учитывает его конечную скорость. Оно выведено из принципов необратимой термодинамики на основании анализа релаксационных процессов, а не исходя из молекулярных представлений капиллярности. Поэтому уравнение Лыкова характеризуется определённой общностью. Для рассматриваемой задачи получена априорная оценка в дифференциальной трактовке с помощью метода энергетических неравенств, из которой следует устойчивость решения задачи по входным данным. Построена соответствующая разностная схема второго порядка точности по пространственному и временному шагу.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, сосредоточенная теплоемкость, априорная оценка, разностная схема

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MOISTURE TRANSFER WITH A CONCENTRATED HEAT CAPACITY

Nakhusheva F.M., Kuvazhukova R.Kh., Maksidova Z.T.

Kabardino-Balkaria State University H.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru

In this work the equation of moisture transfer with boundary conditions of the third kind, when the concentrated thermal capacity of a some value on the border of the area is placed, is considered. Similar conditions arise when a body with a large thermal conductivity is considered when solving the problem of establishing a temperature in a restricted medium in the presence of a heater called the concentrated heat capacity. Similar conditions also arise in the practice of regulating the salt regime of soils, when desalination of the upper layer is achieved by draining the layer of water from the surface of the flooded area for some time. It is known that the Aller's equation and other moisture transfer equations, which are based on the diffusion model, offer an infinite velocity of disturbances spread. The Lykov's equation takes into account its finite velocity. It is derived from thermodynamics on the basis of an analysis of relaxation processes, and not on the basis of molecular representations of capillarity. Therefore, the equation Lykov's is characterized by a particular generality. For this problem we obtain an a priori estimation in the differential form by the method of energy inequalities, from that follows the stability of the solution of the problem with on input data, and also its uniqueness. The corresponding difference scheme of the second order of accuracy by space and time step is constructed.

Keywords: equation of moisture transfer, concentrated heat capacity, priori estimate, difference scheme

Уравнение Лыкова учитывает, в отличие от уравнения Аллера, конечную скорость распространения возмущения. Оно выведено из принципов необратимой термодинамики на основе анализа релаксационных процессов, а не исходя из молекулярных представлений капиллярности. В работе [4] для уравнения влагопереноса Лыкова с краевыми условиями первого рода получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Получены экономичные факторизованные схемы в многомерной области, устойчивость которых доказана с использованием общей теории устойчивости схем. В работе [6] проведено исследование локально-одномерных схем для уравнения теплопроводности с сосре-

доточенной теплоемкостью. В работе [3] выведена априорная оценка решения уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью, построена схема и получена соответствующая априорная оценка в равномерной метрике. В работе [2] был рассмотрен случай многомерной задачи для уравнения диффузии дробного порядка, когда на границе области по каждому направлению помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины.

Постановка задачи. Устойчивость

В области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ рассматривается задача для уравнения влагопереноса с переменными коэффициентами с сосредоточенной теплоемкостью вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x,t)u + f(x,t), \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\begin{cases} k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} = \chi_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1(t)u - \mu_1(t), & x = 0, \\ -k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} = \chi_2 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2(t)u - \mu_2(t), & x = l, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для коэффициентов требуем выполнения условий $0 < c_0 \leq k(x,t) \leq c_1$, $k(x,t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T)$, $|k_t(x,t)| \leq c_2$, $q(x,t) \geq m > 0$, $\beta_1, \beta_2 \geq \beta_* > 0$, $|\beta_{1t}(t)|, |\beta_{2t}(t)| \leq c_3$, $\chi_1, \chi_2 \geq 0$, $\chi_1 + \chi_2 > 0$. Здесь $C^{3,1}(\bar{Q}_T)$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными третьего порядка по x и первого порядка по t в $\bar{Q}_T$.

Доказательство устойчивости решения задачи (1)–(3) проводим с помощью метода энергетических неравенств [5]. Для чего умножаем уравнение (1) скалярно на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и приходим к энергетическому тождеству:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(q(x,t)u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left(f(x,t), \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (4)$$

где скалярное произведение $(u, v) = \int_0^l u \cdot v dx$, норма $\|u\|_0^2 = \int_0^l u^2 dx$. Для первого и второго скалярных произведений в (4) имеем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \int_0^l u_t^2 dx = \|u_t\|_0^2, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u_t^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_t\|_0^2. \quad (6)$$

Для третьего скалярного произведения в (4) применяем интегрирование по частям. Учитывая условия (2), будем иметь:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= -\chi_2 u_t^2(l,t) - \chi_1 u_t^2(0,t) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta_2(t)u^2(l,t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta_1(t)u^2(0,t)) + \frac{1}{2} \beta_{2t}(t)u^2(l,t) + \frac{1}{2} \beta_{1t}(t)u^2(0,t) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (\mu_2(t)u(l,t)) + \frac{\partial}{\partial t} (\mu_1(t)u(0,t)) - \mu_{2t}(t)u(l,t) - \mu_{1t}(t)u(0,t) - \\ &- \int_0^l k(x,t) u_x(x,t) \cdot u_{xt}(x,t) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя равенство $(ku_x^2)_t = k_t u_x^2 + 2k u_x u_{xt}$, можем записать $k u_x u_{xt} = \frac{1}{2} (ku_x^2)_t - \frac{1}{2} k_t u_x^2$. Тогда для интеграла в (7) будем иметь:

$$\int_0^l k(x,t) u_x(x,t) \cdot u_{xt}(x,t) dx = \int_0^l \left(\frac{1}{2} (ku_x^2)_t - \frac{1}{2} k_t u_x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l k u_x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l k_t u_x^2 dx.$$

Теперь (7) с учётом последнего можем переписать:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\chi_2 u_t^2(l,t) - \chi_1 u_t^2(0,t) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta_2(t) u^2(l,t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta_1(t) u^2(0,t)) + \frac{1}{2} \beta_{2t}(t) u^2(l,t) + \frac{1}{2} \beta_{1t}(t) u^2(0,t) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} (\mu_2(t) u(l,t)) + \frac{\partial}{\partial t} (\mu_1(t) u(0,t)) - \mu_{2t}(t) u(l,t) - \mu_{1t}(t) u(0,t) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l k u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k_t u_x^2 dx. \end{aligned} \quad (8)$$

С учётом условий на $k(x, t)$ и $k_t(x, t)$ для интегралов в правой части (8) запишем:

$$\int_0^l k(x,t) u_x^2 dx \leq c_1 \|u_x\|_0^2, \quad \int_0^l k_t(x,t) u_x^2 dx \leq c_2 \|u_x\|_0^2. \quad (9)$$

Для четвёртого интеграла в (4), учитывая условие на $q(x, t)$, можем записать:

$$(qu(x,t), u_t) \leq \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u^2(x,t) dx = \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2. \quad (10)$$

Для последнего скалярного произведения в тождестве (4) также запишем:

$$(f(x,t), u_t) \leq \frac{1}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_0^2. \quad (11)$$

С учётом (5)–(11) и условий на $\beta_1, \beta_2, \beta_{1t}, \beta_{2t}$, используя лемму ([1], стр.152), из (4) будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_t\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_t\|_0^2 + m_1 \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 + m_2 \frac{\partial}{\partial t} \|u_x\|_0^2 + \chi_2 u_t^2(l,t) + \chi_1 u_t^2(0,t) \leq \\ & \leq m_3 \|u\|_0^2 + m_4 \|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \frac{1}{2} (\|f\|_0^2 + (\mu_{1t}^2(t) + \mu_{2t}^2(t))). \end{aligned}$$

Учтём условия $\chi_1, \chi_2 \geq 0$, $\chi_1 + \chi_2 > 0$ и, пренебрегая положительными слагаемыми, отчего неравенство только усилится, последнее неравенство перепишем:

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t} \|u_t\|_0^2 + m_1 \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 + m_2 \frac{\partial}{\partial t} \|u_x\|_0^2 \leq \\ & \leq m_3 \|u\|_0^2 + m_4 \|u_x\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t} (\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \|f\|_0^2 + (\mu_{1t}^2(t) + \mu_{2t}^2(t)). \end{aligned} \quad (12)$$

где m_1, m_2, m_3, m_4 – положительные постоянные величины.

Неравенство (12) проинтегрируем теперь по τ в пределах от 0 до t , учитывая начальные условия (3), имеем интегралы:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \|u_t\|_0^2 d\tau = \|u_t(x,t)\|_0^2 - \|u_t(x,0)\|_0^2 = \|u_t(x,t)\|_0^2 - \|u_1(x)\|_0^2, \\ & \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \|u\|_0^2 d\tau = \|u(x,t)\|_0^2 - \|u(x,0)\|_0^2 = \|u(x,t)\|_0^2 - \|u_0(x)\|_0^2, \\ & \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \|u_x\|_0^2 d\tau = \|u_x(x,t)\|_0^2 - \|u_x(x,0)\|_0^2 = \|u_x\|_0^2 - \|u'_0(x)\|_0^2, \\ & \int_0^t \|u_t\|_0^2 d\tau = \|u_t(x,t)\|_{2,Q}^2, \quad \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau = \|u\|_{2,Q}^2, \quad \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau = \|u_x\|_{2,Q}^2, \quad \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau = \|f\|_{2,Q}^2. \end{aligned}$$

Учитывая вышеизложенное, перепишем неравенство (12):

$$\|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leq M_1 \left(\|u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|u\|_{2,Q_t}^2 \right) + \|f\|_{2,Q_t}^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \int_0^t (\mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau)) d\tau + M_2 \left(\|u_1(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'\|_0^2 \right)$$

или с учётом того, что $\|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'\|_0^2 = \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2$, перепишем неравенство

$$\|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leq M_1 \left(\|u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|u\|_{2,Q_t}^2 \right) + \|f\|_{2,Q_t}^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \int_0^t (\mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau)) d\tau + M_2 \left(\|u_1(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \quad (13)$$

где M_1, M_2 – положительные величины. Введем далее обозначение:

$$F(x) = \|f\|_{2,Q_t}^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \int_0^t (\mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau)) d\tau + M_2 \left(\|u_1(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right).$$

Тогда неравенство (13), пренебрегая положительными слагаемыми $\|u_t\|_{2,Q_t}^2, \|u_t\|_0^2$ в левой части (отчего неравенство только усилится) перепишем в виде

$$\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leq M_1 \int_0^t \left(\|u_x(x,\tau)\|_0^2 + \|u(x,\tau)\|_0^2 \right) d\tau + F(t). \quad (14)$$

Введем обозначение: $\int_0^t \left(\|u_x(x,\tau)\|_0^2 + \|u(x,\tau)\|_0^2 \right) d\tau = y(t)$, тогда $\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 = \frac{dy}{dt}$.

С учетом принятых обозначений неравенство (14) можем переписать:

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq M_1 y(t) + F(t). \quad (15)$$

Применяя известную лемму [1], из неравенства (15) запишем: $y(t) \leq e^{M_1 t} \cdot t \cdot F(t)$. С учётом последнего и вышесделанных обозначений имеем:

$$\int_0^t \left(\|u_x(x,\tau)\|_0^2 + \|u(x,\tau)\|_0^2 \right) d\tau \leq e^{M_1 t} \cdot t \cdot F(t).$$

Из (13), учитывая последнее, получаем неравенство

$$\|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leq M(t) \left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right) + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \int_0^t (\mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau)) d\tau.$$

Поскольку $\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 = \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2$, окончательно получим неравенство

$$\|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|u_t\|_0^2 + \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M(t) \left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right) + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \int_0^t (\mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau)) d\tau. \quad (16)$$

Здесь положительная величина $M(t)$ зависит от коэффициентов уравнения и размеров области Q_T . Из априорной оценки (16) заключаем устойчивость решения задачи (1)–(3) по входным данным.

Разностная схема

В $\bar{Q}_T \equiv \{(x,t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ строим сетку $\bar{\omega}_{\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) = (ih, j\tau)\}$, где $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$, h – шаг сетки, N – число разбиений; $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$,

τ – шаг сетки, j_0 – число разбиений. Через $y_i^j = y(x_i, t_j)$ обозначается значение сеточной функции y в узле (x_i, t_j) , определенной на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ [5]. Дифференциальному уравнению (1) ставится в соответствие параметрическое разностное уравнение вида

$$y_i^\circ + y_{\bar{t}i} = \Lambda(\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \tilde{y}) + \phi, \quad x \in \omega_h, \quad (17)$$

σ_1, σ_2 – вещественные параметры, $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$, $\hat{y} = y_i^{j+1}$, $y = y_i^j$, $\tilde{y} = y_i^{j-1}$, $\Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x - d y$,
 $(a y_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right)$, $y_i^\circ = \frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau}$, $y_{\bar{t}i} = \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2}$. Разностное

уравнение (17) аппроксимирует уравнение (1) с точностью $O(h^2 + \tau^2)$. Следуя [5], получим аппроксимацию краевых условий (2) с точностью $O(h^2 + \tau^2)$. Для ku' при $x = 0$ запишем:

$$a_1 u_{\bar{x},1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(x,t)u - f(x,t) \right)_0 = k_0 u'_0 + O(h^2).$$

Тогда для краевого условия (2) при $x = 0$ имеем

$$a_1 y_{\bar{x},1}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \left(\frac{h + 2\chi_1}{2} \right) y_{i,0}^\circ + \frac{h}{2} y_{\bar{t}i,0} + \left(\frac{h}{2} d_0 + \beta_1 \right) y_0^{(\sigma_1, \sigma_2)} - \left(\frac{h}{2} f_0 + \mu_1 \right), \quad x = 0. \quad (18)$$

Здесь $y_{i,0}^\circ = \frac{y_0^{j+1} - y_0^{j-1}}{2\tau}$, $a_1 y_{\bar{x},1} = a_1 \frac{y_1 - y_0}{h}$, $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \tilde{y}$. Также

для $-ku'$ в (2) при $x = l$ запишем:

$$-a_N u_{\bar{x},N} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(x,t)u - f(x,t) \right)_N = k_N u'_N + O(h^2).$$

Тогда аппроксимируется второе граничное условие (2) при $x = l$ в виде

$$-a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \left(\frac{h + 2\chi_2}{2} \right) y_{i,N}^\circ + \frac{h}{2} y_{\bar{t}i,N} + \left(\frac{h}{2} d_N + \beta_2 \right) y_N^{(\sigma_1, \sigma_2)} - \left(\frac{h}{2} f_N + \mu_2 \right), \quad x = l. \quad (19)$$

Здесь $y_{i,N}^\circ = \frac{y_N^{j+1} - y_N^{j-1}}{2\tau}$, $a_N y_{\bar{x},N} = a_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h}$.

Первому начальному условию (3) ставим в соответствие разностное условие вида

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x = x_i \in \bar{\omega}_h. \quad (20)$$

Второе начальное условие в (3) выражением $y_i(x, 0) = u_1(x)$ аппроксимируется только с точностью $O(\tau)$. Получим аппроксимацию второго порядка по τ . Используя формулу Тейлора, с учётом $u_i(x, 0) = u_1(x)$ запишем:

$$u^1 = u^0 + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^0 + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^0 + O(\tau^3) = u_0(x) + \tau u_1(x) + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^0 + O(\tau^3). \quad (21)$$

Выразив $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ из уравнения (1) и учитывая, $u_1(x) = u_i^0$ и перенося $u_0(x) = u^0$ влево и разделив на τ , из (21) получим

$$\frac{u^1 - u^0}{\tau} = \left(1 - \frac{\tau}{2} \right) u_i^0 + \frac{\tau}{2} \left((ku_x)_x^0 - q^0 u_0(x) + f^0 \right) + O(\tau^2),$$

откуда

$$u_i^0 = \frac{1}{1 - 0.5\tau} \frac{u^1 - u^0}{\tau} - \frac{\tau}{2 - \tau} \left((ku_x)_x^0 - q^0 u_0(x) + f^0 \right) + O(\tau^2). \quad (22)$$

Итак, получена аппроксимация начального условия $u_t(x, 0) = u_1(x)$ с точностью $O(\tau^2)$. Таким образом, разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу (1)–(3) с точностью $O(h^2 + \tau^2)$ имеет вид

$$a_1 y_{\bar{x},1}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \left(\frac{h + 2\chi_1}{2} \right) y_{i,0}^{\sigma_1} + \frac{h}{2} y_{\bar{t},0} + \left(\frac{h}{2} d_0 + \beta_1 \right) y_0^{(\sigma_1, \sigma_2)} - \left(\frac{h}{2} f_0 + \mu_1 \right), \quad x=0, \quad (23)$$

$$y_i^{\sigma_1} + y_{\bar{t}} = \Lambda (\sigma_1 \bar{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \bar{y}) + \phi, \quad x \in \omega_h, \quad (24)$$

$$-a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \left(\frac{h + 2\chi_2}{2} \right) y_{i,N}^{\sigma_2} + \frac{h}{2} y_{\bar{t},N} + \left(\frac{h}{2} d_N + \beta_2 \right) y_N^{(\sigma_1, \sigma_2)} - \left(\frac{h}{2} f_N + \mu_2 \right), \quad x=l, \quad (25)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (26)$$

$$y_i(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x = x_i \in \bar{\omega}_h,$$

где $\tilde{u}_1(x) = \frac{1}{1-0.5\tau} \frac{u^1 - u^0}{\tau} - \frac{\tau}{2-\tau} \left((ku_x)_x - q^0 u_0(x) + f^0 \right)$.

Для реализации на ЭВМ (23)–(26) приводится к системе уравнений с трёхдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки на каждом временном слое.

Список литературы

1. Ладженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
 2. Нахушева Ф.М., Водахова В.А., Кудаева Ф.Х., Аббаева З.В. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоёмкостью // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 2. – С. 763.

3. Нахушева Ф.М., Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А., Кармоков М.М. Разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоёмкостью // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 2–2. – С. 839.
 4. Нахушева Ф.М. Об устойчивости разностных схем для уравнения влагопереноса Лыкова // Известия КБНЦ РАН, № 5(31). – 2009. – № 5(31). – С. 98–103.
 5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. 616 с.
 6. Шхануков-Лафишев М.Х., Нахушева Ф.М., Лафишева М.М., Мамбетова М.М. // Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью. Владикавказский математический журнал. – 2013. – Т. 15(4). – С. 59–65.