

УДК 519.63

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЁМКОСТЬЮ**Нахушева Ф.М., Джанкулаева М.А., Нахушева Д.А.***ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»,**Нальчик, e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru*

В работе рассмотрено уравнение теплопроводности с дробной производной по времени, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость некоторой величины. Необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной связана с тем, что многие проблемы теории фильтрации жидкости в сильнопористой среде приводят к дифференциальным уравнениям с дробной производной. Дробные производные применяются при описании физических процессов стохастического переноса, при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. В связи с этим возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений. Рассмотренные в работе условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью, при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоёмкость. Аналогичные условия возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности затопленного на некоторое время участка. В работе получена априорная оценка решения задачи с помощью метода энергетических неравенств, из которой следует устойчивость решения задачи по входным данным. Построена соответствующая разностная схема, проведено доказательство устойчивости разностной схемы с помощью принципа максимума.

Ключевые слова: производная дробного порядка, устойчивость решения, априорная оценка, устойчивость разностной схемы, принцип максимума

THE HEAT CONDUCTION EQUATION CONDUCTIVITY WITH FRACTURE DERIVATIVES BY TIME WITH CONCENTRATED HEAT CAPACITY**Nakhusheva F.M., Dzhankulaeva M.A., Nakhusheva D.A.***Kabardino-Balkaria State University Kh.M. Berbekov, Nalchik,**e-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru*

In this work the heat conduction equation with a fractional derivative with respect to time is considered, when on the boundary of the domain the concentrated heat capacity of some quantity is placed. The necessity of studying boundary value problems for differential equations with fractional derivative is connected with the fact that many problems of the theory of fluid filtration in a highly porous medium lead to differential equations with a fractional derivative. Fractional derivatives are used in describing the physical processes of stochastic transport, in studying the deformation-strength properties of polymer materials. In this connection the necessity to study boundary value problems for differential equations with fractional derivatives and to develop methods for their solutions arises. The considered conditions arise in the case when a body with a large thermal conductivity is considered when solving the problem of establishing a temperature in a restricted medium in the presence of a heater, called the concentrated heat capacity. Similar conditions also arise in the practice of regulating the salt regime of soils, when desalination of the upper layer is achieved by draining a layer of water from the surface of a flooded area for a time. An a priori estimate of the solution of the problem is obtained using the method of energy inequalities, from which the stability of the solution of the problem with respect to input data follows. The corresponding difference scheme is constructed, the stability of the difference scheme is proved by means of the maximum principle.

Keywords: derivative of fractional order, stability of solution, priori estimate, stability of difference scheme, maximum principle

Теория фракталов применяется при описании структуры неупорядоченных сред, например пористых сред, и описании протекающих в таких средах процессов. Движение примеси в потоке однородной жидкости описывается с использованием дифференциального уравнения дробного порядка [7]. Язык дробных производных применен при описании физических процессов стохастического переноса [9], при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов [1].

Диффузии дробного порядка посвящена работа [3]. Методам численного решения многомерного уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [5, 6, 10]. Задачи с сосредоточенной теплоёмкостью определённой величины на границе изучены в [8].

В данной работе рассматривается уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоёмкостью определённой величины.

Постановка задачи. Устойчивость

В области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ будем рассматривать уравнение теплопроводности с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоемкостью вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \chi_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1(t)u - \mu_1(t), & x = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x} = \chi_2 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2(t)u - \mu_2(t), & x = l, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \geq 0, \quad (3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u_\tau(x, \tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$ – регуляризованная дробная производная порядка α , где $0 < \alpha < 1$. Коэффициенты удовлетворяют условиям: $\beta_1, \beta_2 \geq \beta_* > 0$, $\chi_1, \chi_2 \geq 0$, $\chi_1 + \chi_2 > 0$. Устойчивость решения задачи (1)–(3) будем доказывать с помощью известного метода энергетических неравенств [8].

Для чего уравнение (1) умножаем на $u(x, t)$ скалярно и получим тождество

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) + (\partial_{0t}^\alpha u, u) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right) - (u, u) + (f(x, t), u). \quad (4)$$

В (4) скалярное произведение определено по формуле $(u, v) = \int_0^l u \cdot v dx$ и норма через него $\|u\|_0^2 = (u, u) = \int_0^l u^2 dx$. Первое и второе слагаемые в (4) нам дадут

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) &= \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2, \\ (\partial_{0t}^\alpha u, u) &= \int_0^l \partial_{0t}^\alpha u \cdot u dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Для третьего слагаемого в (4) применяем интегрирование по частям:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right) = \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot u dx = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) \cdot u(l, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \cdot u(0, t) - \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Принимая во внимание граничные условия (2), из последнего можем записать:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \right) &= -\chi_2 \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} u(l, t) - \beta_2(t) u^2(l, t) + \mu_2(t) u(l, t) - \\ &- \chi_1 \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} u(0, t) - \beta_1(t) u^2(0, t) + \mu_1(t) u(0, t) - \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) к слагаемым $\mu_1(t)u(0, t)$, $\mu_2(t)u(l, t)$, $\beta_1(t)u^2(0, t)$, $\beta_2(t)u^2(l, t)$ применяется известное неравенство из [4, с. 172]. Первое и четвертое выражения в правой части (6) перепишем в виде

$$\chi_2 \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} u(l, t) = \frac{\chi_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2(l, t)), \quad \chi_1 \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} u(0, t) = \chi_1 \frac{\partial}{\partial t} (u^2(0, t)).$$

Интеграл в правой части (6), четвёртый и пятый интегралы в тождестве (4) равны соответственно

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx &= \|u_x\|_0^2, \quad (u, u) = \int_0^l u^2(x, t) dx = \|u\|_0^2, \\ (f(x, t), u) &\leq \frac{1}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u\|_0^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку интеграл $\int_0^l \partial_{0t}^\alpha u \cdot u \, dx \geq 0$, то, пренебрегая им в левой части (4) (неравенство только усилится), с учётом (5)–(7) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 \leq & -\frac{\chi_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2(l, t)) - \frac{\chi_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2(0, t)) - (\varepsilon(2\beta_* - 1) + 1) \|u_x\|_0^2 + \\ & + \left(c_\varepsilon - 2\beta_* \varepsilon - \frac{1}{2} \right) \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|f(x, t)\|_0^2 + \frac{1}{2} \mu_1^2(t) + \frac{1}{2} \mu_2^2(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Полученное неравенство (8) теперь будем интегрировать по τ от 0 до t . С учетом начального значения (3) получаем для первого слагаемого:

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau = \frac{1}{2} \|u(x, t)\|_0^2 - \frac{1}{2} \|u_0(x)\|_0^2. \quad (9)$$

Для третьего и четвёртого выражений получим:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\chi_2}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (u^2(l, \tau)) d\tau &= \frac{\chi_2}{2} (u^2(l, t) - u^2(l, 0)), \\ \int_0^t \frac{\chi_1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (u^2(0, \tau)) d\tau &= \frac{\chi_1}{2} (u^2(0, t) - u^2(0, 0)). \end{aligned} \quad (10)$$

К выражениям $u^2(0, t)$, $u^2(l, t)$ также будем применять неравенство из [4, с. 172], а с учетом условия (3) запишем: $u^2(0, 0) \leq u_0^2(0)$, $u^2(l, 0) \leq u_0^2(l)$. Для пятого, шестого и седьмого интегралов имеем

$$\int_0^t \|u_x(x, \tau)\|_0^2 d\tau = \|u_x(x, t)\|_{2, Q_t}^2, \quad \int_0^t \|u(x, \tau)\|_0^2 d\tau = \|u(x, t)\|_{2, Q_t}^2, \quad \int_0^t \|f(x, \tau)\|_0^2 d\tau = \|f(x, t)\|_{2, Q_t}^2. \quad (11)$$

Учитывая (9)–(11) из (8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(\chi_1 + \chi_2)}{2} \|u_x(x, t)\|_0^2 + \left(\frac{c_\varepsilon(\chi_1 + \chi_2)}{2} + \frac{1}{2} \right) \|u(x, t)\|_0^2 \leq & (\varepsilon - 2\beta_* \varepsilon - 1) \|u_x(x, t)\|_{2, Q_t}^2 + \\ & + \left(c_\varepsilon - 2\beta_* \varepsilon - \frac{1}{2} \right) \|u(x, t)\|_{2, Q_t}^2 + \frac{1}{2} \|f(x, t)\|_{2, Q_t}^2 + \frac{1}{2} \|u_0(x)\|_0^2 + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)) d\tau + \frac{\chi_1}{2} u_0^2(0) + \frac{\chi_2}{2} u_0^2(l). \end{aligned} \quad (12)$$

Сделаем обозначение в последнем неравенстве: $\nu/2 = c_\varepsilon - 2\beta_* \varepsilon - 1/2$ и потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon - 2\beta_* \varepsilon - 1 \geq 1/2$. Также заметим, что $c_\varepsilon(\chi_1 + \chi_2) > 0$, $\varepsilon(\chi_1 + \chi_2) > 0$ ввиду условий $\chi_1 \geq 0$, $\chi_2 \geq 0$, $\chi_1 + \chi_2 > 0$. С учетом этого, сократив неравенство на $1/2$, из (12) будем иметь

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_0^2 + \|u_x(x, t)\|_0^2 \leq & M_1 \int_0^t (\|u(x, \tau)\|_0^2 + \|u_x(x, \tau)\|_0^2) d\tau + \\ & + \|f(x, t)\|_{2, Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \int_0^t (\mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)) d\tau + \chi_1 u_0^2(0) + \chi_2 u_0^2(l). \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) обозначим

$$F(t) = \|f(x, t)\|_{2, Q_t}^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \int_0^t (\mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)) d\tau + \chi_1 u_0^2(0) + \chi_2 u_0^2(l).$$

Тогда из (13) можем записать

$$\|u(x, t)\|_0^2 + \|u_x(x, t)\|_0^2 \leq M_1 \int_0^t (\|u(x, \tau)\|_0^2 + \|u_x(x, \tau)\|_0^2) d\tau + F(t). \quad (14)$$

Введем в (14) обозначение: $\int_0^t (\|u(x, \tau)\|_0^2 + \|u_x(x, \tau)\|_0^2) d\tau = y(t)$, с учетом которого неравенство (14) переписывается в виде $\frac{dy(t)}{dt} \leq y(t) + F(t)$. Далее, применяя лемму 1.1 для нестационарных задач ([4], стр.152), из последнего неравенства можем иметь неравенство: $y(t) \leq e^t \cdot t \cdot F(t)$. Теперь, учитывая последнее неравенство и введенные выше обозначения, записываем:

$$\int_0^t (\|u(x, \tau)\|_0^2 + \|u_x(x, \tau)\|_0^2) d\tau \leq e^t \cdot t \cdot F(t). \quad (15)$$

Учитывая (15), из неравенства (13) получаем неравенство:

$$\|u(x, t)\|_0^2 + \|u_x(x, t)\|_0^2 \leq M(t) (\|u_0(x)\|_0^2 + \|f(x, t)\|_{2,Q_t}^2) + \int_0^t (\mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)) d\tau, \quad (16)$$

здесь $M(t)$ – величина положительная, которая зависит от коэффициентов уравнения (1) и размеров области Q_T . Из полученной априорной оценки (16) можем сделать вывод, что решение задачи (1)–(3) устойчиво по начальному значению, граничным данным и правой части.

Разностная схема

Будем предполагать в дальнейшем, что решение задачи обладает требуемой по ходу изложения гладкостью. В замкнутой области $\bar{Q}_T \equiv \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ строится сетка

$$\bar{\omega}_{ht} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) = (ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, j_0\},$$

где $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$, $h = l/N$ – шаг сетки $\bar{\omega}_h$ по переменной x , N – число разбиений по x , $\tau = T/j_0$ – шаг сетки $\bar{\omega}_\tau$ по переменной t , j_0 – число разбиений по t . Для уравнения (1) запишем разностное уравнение с параметром в виде

$$y_i + \Delta_{0t}^\alpha y = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad (17)$$

где σ – параметр, $y_i = \frac{\hat{y} - y}{\tau}$, $\hat{y} = y_i^{j+1}$, $y = y_i^j$, $\Lambda y = y_{\bar{x}x} - y$, $y_{\bar{x}x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$,

$\Delta_{0t}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_i^s$ – дискретный аналог дробной производной,

$y_i^s = \frac{y^{s+1} - y^s}{\tau}$. В классе достаточно гладких функций $u(x, t)$ справедливо равенство:

$\partial_{0t}^\alpha u = \Delta_{0t}^\alpha u + O(\tau)$ (Шхануков М.Х. Доклады РАН. – 1996. – Т. 348. С. 746–748). Разностное уравнение (17) аппроксимирует уравнение (1) с точностью $O(h^2 + \tau)$.

Аппроксимацию при $x = 0$ краевого условия (2) $y_{\bar{x},1} = \chi_1 y_i + \beta_1 y_0 - \mu_1$, дающую точность $O(h + \tau)$, повышаем, следуя [8], до порядка $O(h^2 + \tau)$. Получаем

$$\Delta_{0t}^\alpha y_0 = \frac{y_{\bar{x},1} - (\chi_1 + 0.5h)y_{i,0} - (0.5h + \beta_1)y_0}{0.5h} + \frac{0.5h f_0 + \mu_1}{0.5h},$$

где $y_{i,0} = \frac{\hat{y}_0 - y_0}{\tau}$, $y_{\bar{x},1} = \frac{y_1 - y_0}{h}$. Аналогично, для (2) при $x = l$ получаем

$$\Delta_{0t}^\alpha y_0 = \frac{-y_{\bar{x},N} - (\chi_2 + 0.5h)y_{i,N} - (0.5h + \beta_2)y_N}{0.5h} + \frac{0.5h f_N + \mu_2}{0.5h},$$

где $y_{i,N} = \frac{\hat{y}_N - y_N}{\tau}$, $y_{\bar{x},N} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}$.

Итак, разностный аналог задачи (1)–(3), дающий точность $O(h^2 + \tau)$, запишется в виде

$$\Delta_{0t}^\alpha y_0 = \frac{y_{\bar{x},1}^{(\sigma)} - (\chi_1 + 0,5h)y_{t,0} - (0,5h + \beta_1)y_0^{(\sigma)}}{0,5h} + \tilde{\mu}_1, \quad x = 0, \quad (18)$$

$$y_t + \Delta_{0t}^\alpha y = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi, \quad x \in \omega_h, \quad (19)$$

$$\Delta_{0t}^\alpha y_N = -\frac{y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + (\chi_2 + 0,5h)y_{t,N} + (0,5h + \beta_2)y_N^{(\sigma)}}{0,5h} + \tilde{\mu}_2, \quad x = l, \quad (20)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x = x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (21)$$

где $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y$, $\tilde{\mu}_1 = \frac{\bar{\mu}_1}{0,5h}$, $\bar{\mu}_1 = 0,5hf_0 + \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \frac{\bar{\mu}_2}{0,5h}$, $\bar{\mu}_2 = 0,5hf_N + \mu_2$.

Для достижения порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ при построении разностной схемы потребовалась достаточно высокая гладкость решения $u(x, t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$, для чего необходимо $f(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$.

Устойчивость разностной схемы

Для доказательства устойчивости построенной разностной схемы будем пользоваться принципом максимума. Для этого разностную схему (18)–(21) приведем к каноническому виду [8, с. 228]:

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \omega, \quad (22)$$

где ω – сетка связная; $\Pi'(P)$ – окрестность узла P , не содержащая сам узел P , $F(P)$ – известная правая часть. Для коэффициентов (22) должны выполняться условия: $A(P) > 0$ для всех $P \in \omega$; $B(P, Q) > 0$ для всех $P, Q \in \omega$; $D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q) \geq 0$, $P \in \omega$. Рассмотрим

случай $\sigma = 1$. Тогда (22) имеет вид: $y_t + \Delta_{0t}^\alpha y = \Lambda \hat{y} + \phi$. Расписав в индексной форме с учё-

том того, что $\frac{t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha}}{\tau} = \frac{1}{\tau^\alpha}$, $\frac{t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}}{\tau} = \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\tau^\alpha}$, имеем

$$\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1 \right) y_i^{j+1} = \frac{1}{h^2} y_{i+1}^{j+1} + \frac{1}{h^2} y_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{2 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{\tau} \right) y_i^j + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} y_i^{j-1} - \sum_{s=0}^{j-2} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_i^s + \phi_i^j.$$

Здесь коэффициенты:

$$A(P) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1, \\ B(P, Q) = \left\{ \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^2}, \frac{2 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{\tau}, \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \right\}, \quad D(P(x_i, t_{j+1})) = 1.$$

Выполняются условия:

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad D(P) > 0. \quad (23)$$

В точке $P = P(x_0, t_{j+1})$ для (23) будем иметь

$$\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{0,5h^2} + \frac{2\chi_1 + h}{h\tau} + 1 + \frac{\beta_1}{0,5h} \right) y_0^{j+1} = \frac{1}{0,5h^2} y_1^{j+1} + \left(\frac{2 - 2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{2\chi_1 + h}{h\tau} \right) y_0^j + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} y_0^{j-1} - \sum_{s=0}^{j-2} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) \frac{y_0^{s+1} - y_0^s}{\tau} + \tilde{\mu}_1.$$

Здесь коэффициенты равны

$$A(P) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{0.5h^2} + \frac{2\chi_1 + h}{h\tau} + 1 + \frac{\beta_1}{0.5h},$$

$$B(P, Q) = \left\{ \frac{1}{0.5h^2}, \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}, \frac{2\chi_1 + h}{h\tau}, \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \right\}, \quad D(P(x_0, t_{j+1})) = 1 + \frac{\beta_1}{0.5h}.$$

С учетом неравенств $\beta_1 \geq \beta_* > 0$, $\chi_1 \geq 0$ имеем выполнение условий на коэффициенты:

$$A(P) > 0, B(P, Q) > 0, D(P(x_0, t_{j+1})) > 0. \quad (24)$$

Аналогично, в точке $P = P(x_N, t_{j+1})$ для граничного условия (20) имеем

$$\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{0.5h^2} + \frac{2\chi_2 + h}{h\tau} + 1 + \frac{\beta_2}{0.5h} \right) y_N^{j+1} = \frac{1}{0.5h^2} y_{N-1}^{j+1} +$$

$$+ \left(\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{2\chi_2 + h}{h\tau} \right) y_N^j + \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} y_N^{j-1} - \sum_{s=0}^{j-2} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) \frac{y_N^{s+1} - y_N^s}{\tau} + \tilde{\mu}_2.$$

Здесь коэффициенты имеют вид

$$A(P) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} + \frac{1}{0.5h^2} + \frac{2\chi_2 + h}{h\tau} + 1 + \frac{\beta_2}{0.5h},$$

$$B(P, Q) = \left\{ \frac{1}{0.5h^2}, \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}, \frac{2\chi_2 + h}{h\tau}, \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \right\}, \quad D(P(x_N, t_{j+1})) = 1 + \frac{\beta_2}{0.5h}.$$

С учетом условий $\beta_2 \geq \beta_* > 0$, $\chi_2 \geq 0$ имеем выполнение условий:

$$A(P) > 0, B(P, Q) > 0, D(P(x_N, t_{j+1})) > 0. \quad (25)$$

Из неравенств (23)–(25) на основании теоремы 3 [8, с. 228], для разностной задачи (18)–(21) следует справедливость оценки в норме пространства C : $\|y\|_C \leq \left\| \frac{F(P)}{D(P)} \right\|_C$,

откуда следует устойчивость решения разностной схемы в равномерной метрике.

Список литературы

1. Бегли Р.Л., Торвик П.Дж. Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка – новый подход к расчёту конструкций с вязкоупругим демпфированием // Аэрокосмическая техника. – 1984. – Т. 2, № 2. С. 84–93.
2. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках для смешанного уравнения гипербола-параболического типа // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 5. – С. 707–716.

3. Кочубей А.Ю. Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – С. 660–670.

4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

5. Нахушева Ф.М. Об одном классе нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности // Доклады А(Ч) МАН. – Нальчик, 1995. – Т. 1, № 2. – С. 23–25.

6. Нахушева Ф.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Об устойчивости локально-одномерной схемы для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области // Доклады А(Ч)МАН. – Нальчик, 1997. – Т. 1, № 2. – С. 23–26.

7. Нигматуллин Р.Р. Решение обобщенного уравнения переноса в среде с фрактальной геометрией // Phys. stat. Sol. b. 133, 1986. (The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Status solidi. B. 1986. V 133. P. 425–430).

8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 616 с.

9. Чукбар К.В. Стохастический перенос и дробные производные. – ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108. – Вып. 5(11). – С. 1875–1884.

10. Шхануков-Лафишев М.Х., Нахушева Ф.М. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка в r -мерном параллелепипеде // Известия КБНЦ РАН. – 1999. – Т. 1, № 2. – С. 35–41.