УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕРЖНЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ТЕПЛООБМЕНА ПРИ НАЛИЧИИ БОКОВОЙ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ

[1]Такишов А.А., [1]Кудайкулов А.К., [2]Ташев А.А., [1]Темирбекова А.А., [1]Аринов Е.

[1]АО «Жезказганский университет им. О.А. Байконурова», Жезказган, e-mail: arinov91@mail.ru;
[2]Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы

Предметом исследования в данной работе являются постановка и вариационый подход решения нестационарной задачи распространения тепла в стержне при воздействии теплового потока и в условиях теплообмена. Результаты исследования показали, что вариационный метод и метод Галеркина при решении нестационарной задачи распространения тепла в стержне приводят к одинаковым системам линейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: тепловой поток, метод Галеркина, вариационный метод, аппроксимация температур, теплоизоляция

THE UNSTEADY THERMOMECHANICAL STATE OF THE ROD UNDER THE INFLUENCE OF THE HEAT FLOW, THE HEAT THANSFER WITH THE SIDE HEAT INSULATION

[1]Takishov A.A., [1]Kudaykulov A.K., [2]Tashev A.A., [1]Temirbekova A.A., [1]Arinov E.

[1]Zhezkazgan university named after O.A. Baykonurov, Zhezkazgan, e-mail: arinov91@mail.ru;
[2]Institute of Information and computing technologies, Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty

The subject of the research of this paper are the setting and variation approach to solve the unsteady tasks of the spreading heat in the rod under the heat flow and heat transfer conditions. The results of the research showed that the variation method and the method of Galerkin to solve the unsteady task of the spreading heat in the rod lead to the same systems of the linear differential equations.

Keywords: heat flow, Galerkin`s method, variation method, approximation of the temperature, the heat insulation

Общая постановка и вариационый подход решения нестационарной задачи распространения тепла в стержне при воздействии теплового потока и в условиях теплообмена рассмотрены в [1]. Согласно этому подходу определяется аппроксимация температур T и вычисляется выражение

$$I = \int_V \left[\frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 - QT + \lambda \frac{dT}{dt} T \right] dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2} h (T - T_\infty)^2 \right] dS, \qquad (1)$$

где $\int_V \frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dV$ – часть тепла, которая уходит на повышение внутренней энергии; $-\int_V QTdV$ – внутренние источники энергии; $\int_V \lambda \frac{dT}{dt} TdV$ – член, учитывающий нестационарность задачи; $\int_S qTdS$ – количество поступающего тепла; $\int_S \frac{1}{2} h (T - T_\infty)^2 dS$ – количества тепла, уходящего через поверхность стержня.

Здесь введены следующие обозначения:

q – тепловой поток (Вт/см^2);

T – температура (ºС);

S – площадь поперечного сечения стержня (см^2);

T_∞ – температура окружающей среды (ºС);

$\lambda = \rho c$ – коэффициент температуропроводности (Вт/(см^2·ºС));

h – коэффициент теплоотдачи (Вт/(см^2·ºС));

K_{xx} – коэффициент теплопроводности материала (Вт/(см·ºС));

Q – источник тепла внутри тела (Вт/(см·ºС));

ρ – плотность (кг/см^2);

c – удельная теплоемкость (Вт/(кг·°С)).

При линейной аппроксимации температуры T стержня длиной L с температурами на концах (T_1, T_2) имеем

$$\frac{T-T_1}{T_2-T_1}=\frac{x}{L}.$$

Откуда

$$T=\left(1-\frac{x}{L}\right)T_1+\frac{x}{L}T_2. \tag{2}$$

Первое выражение (1) для стержня длиной $2L$ с температурами на концах (T_1, T_2) и в середине T_2 имеет вид

$$I_1=\int_V\left[\frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2\right]dV=\frac{K_{xx}S}{2L}(T_1^2-2T_1T_2+T_2^2)+\frac{K_{xx}S}{2L}(T_2^2-2T_3T_2+T_3^2)\cdot \tag{3}$$

Выражение $\int_S qTdS$ для левого конца стержня:

$$I_2=\int_S qTdS=qT_1S. \tag{4}$$

Поток тепла на правом конце стержня равен

$$I_3=\int_S\frac{1}{2}h(T-T_\infty)^2dS=\frac{hS}{2}(T_3^2-2T_3T_\infty+T_\infty^2). \tag{5}$$

Так как боковая поверхность стержня не теплоизолирована, вычислим член $\int_S\frac{1}{2}h(T-T_\infty)^2dS$ для двух интервалов:

$$\begin{aligned}I_4&=\frac{\pi rhL}{3}(T_1^2+T_2^2+3T_\infty^2+T_1T_2-3T_1T_\infty-\\&-3T_2T_\infty+T_2^2+T_3^2+3T_\infty^2+T_2T_3-3T_2T_\infty-3T_3T_\infty)=\\&=\frac{\pi rhL}{3}(T_1^2+2T_2^2+6T_\infty^2+T_1T_2-3T_1T_\infty-\\&-6T_2T_\infty+T_3^2+T_2T_3-3T_3T_\infty).\end{aligned} \tag{6}$$

В нестационарном случае, подставляя производную T по t из (2) в соотношение $\int_V\lambda\frac{dT}{dt}TdV$, получим

$$\begin{aligned}I_5&=\frac{\lambda SL}{6}\left(2\frac{dT_1}{dt}T_1+2\frac{dT_2}{dt}T_2+\frac{dT_1}{dt}T_2+\frac{dT_2}{dt}T_1\right)+\\&+\frac{\lambda SL}{6}\left(2\frac{dT_2}{dt}T_2+2\frac{dT_3}{dt}T_3+\frac{dT_2}{dt}T_3+\frac{dT_3}{dt}T_2\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

Определяя производные от I по T_1, T_2 и T_3 и приравнивая к нулю, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\lambda SL}{6}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dT_1}{dt}\\ \frac{dT_2}{dt}\\ \frac{dT_3}{dt}\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}\frac{K_{xx}S}{L}+\frac{2\pi rhL}{3} & \frac{\pi rhL}{3}-\frac{K_{xx}S}{L} & 0\\ -\frac{K_{xx}S}{L}+\frac{\pi rhL}{3} & 2\frac{K_{xx}S}{L}+\frac{4\pi rhL}{3} & -\frac{K_{xx}S}{L}+\frac{\pi rhL}{3}\\ 0 & \frac{\pi rhL}{3}-\frac{K_{xx}S}{L} & \frac{K_{xx}S}{L}+hS+\frac{2\pi rhL}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-qS+\pi rhLT_\infty\\ 2\pi rhLT_\infty\\ hST_\infty+\pi rhLT_\infty\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь метод взвешенных невязок, а точнее, метод Галеркина.

Общее уравнение теплопроводности стержня имеет вид

$$K_{xx}\frac{d^2T}{dx^2}-Q+\lambda\frac{dT}{dx}=0, \tag{9}$$

при ограничениях

$$K_{xx}\frac{dT}{dx}+q+h\left(T-T_\infty\right)=0. \tag{10}$$

Решим уравнение (9) при ограничениях (10) методом Галеркина с использованием линейной аппроксимации температуры на двух интервалах $\overline{T}_1^T=\left(T_1,T_2\right)$ и $\overline{T}_2^T=\left(T_2,T_3\right)$. Для первого интервала имеем

$$T=\overline{N}^T\overline{T},\ \overline{N}^T=\left(\frac{L-x}{L},\frac{x}{L}\right),\ \overline{T}_1^T=\left(T_1,T_2\right). \tag{11}$$

Согласно методу Галеркина [2] решение задачи (9) при ограничениях (10) должно удовлетворять уравнению:

$$\int_V\overline{N}\left(K_{xx}\frac{d^2T}{dx^2}\right)dV-\int_V\overline{N}QdV+\int_V\overline{N}\lambda\frac{dT}{dx}dV=0. \tag{12}$$

Первый интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int_V\overline{N}\left(K_{xx}\frac{d^2T}{dx^2}\right)dV=\int_V\frac{d}{dx}\left(\overline{N}K_{xx}\frac{dT}{dx}\right)dV-\int_V\frac{d\overline{N}}{dx}K_{xx}\frac{dT}{dx}dV. \tag{13}$$

Вычислим второй интеграл выражения (13):

$$\int_V\frac{d\overline{N}}{dx}K_{xx}\frac{dT}{dx}dV=\frac{sK_{xx}}{L^2}\int_0^L\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}dx=$$

$$=\frac{sK_{xx}}{L^2}\int_0^L\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}dx=\frac{sK_{xx}}{L}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Вычислим первый интеграл выражения (13) с использованием формулы Остроградского-Гаусса. Имеем

$$\int_V \frac{d}{dx}\left(\overline{N}K_{xx}\frac{dT}{dx}\right)dV=\int_S \overline{N}K_{xx}\frac{dT}{d\overline{n}}dS\,, \tag{15}$$

где $\overline{n}$ – нормаль к поверхности.

Уравнение (15) для левого конца стержня, исходя из граничного условия

$$K_{xx}\frac{dT}{dx}+q=0, \tag{16}$$

имеет вид

$$\int_S \overline{N}K_{xx}\frac{dT}{d\overline{n}}dS=\overline{N}\left(-qS\right)|_{x=0}=\begin{pmatrix}-qs\\0\end{pmatrix}. \tag{17}$$

А на правом конце стержня, учитывая граничное условие

$$K_{xx}\frac{dT}{dx}+h\left(T-T_\infty\right)=0, \tag{18}$$

имеем

$$\int_S \overline{N}K_{xx}\frac{dT}{d\overline{n}}dS=-hs\begin{pmatrix}0\\T_2\end{pmatrix}+hs\begin{pmatrix}0\\T_\infty\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Если тепло уходит через боковую поверхность, то граничное условие (18) имеет вид

$$\int_S \overline{N}K_{xx}\frac{dT}{d\overline{n}}dS=$$

$$=-\frac{2\pi rh}{L^2}\int_0^L\begin{pmatrix}L-x\\x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L-x & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}dx+$$

$$+\frac{2\pi rh}{L}\int_0^L\begin{pmatrix}L-x\\x\end{pmatrix}T_\infty dx=$$

$$=-\frac{2\pi rh}{L^2}\int_0^L\begin{pmatrix}L^2-2Lx+x^2 & Lx-x^2\\Lx-x^2 & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}dx\,.$$

$$+2\pi rhL\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}T_\infty=-\frac{2\pi rhL}{3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}+2\pi rhL\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}T_\infty\,. \tag{20}$$

Вычислим третий член в уравнении (12).

$$\int_V \overline{N}\lambda\frac{dT}{dx}dV=\frac{\lambda S}{L^2}\int_0^L\begin{pmatrix}L-x\\x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L-x & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dT_1}{dt}\\\frac{dT_2}{dt}\end{pmatrix}dx=\frac{\lambda SL}{3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dT_1}{dt}\\\frac{dT_2}{dt}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Формулы (14), (17), (19)–(21) позволяют получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\lambda SL}{3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dT_1}{dt}\\ \frac{dT_2}{dt}\end{pmatrix}+\frac{sK_{xx}}{L}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-qs\\ 0\end{pmatrix}+$$

$$+hs\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}-hs\begin{pmatrix}0\\ T_\infty\end{pmatrix}+\frac{2\pi rhL}{3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}-2\pi rhL\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}T_\infty=0. \qquad (22)$$

Уравнение (14) можно преобразовать к виду

$$\frac{\lambda SL}{3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dT_1}{dt}\\ \frac{dT_2}{dt}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{2\pi rhL}{3} & -\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{\pi rhL}{3}\\ -\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{\pi rhL}{3} & \frac{sK_{xx}}{L}+\frac{2\pi rhL}{3}+hs\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-qs+\pi rhLT_\infty\\ \pi rhL+hsT_\infty\end{pmatrix}.$$

Если возьмем два интервала, то для первого имеем

$$\frac{\lambda SL}{3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dT_1}{dt}\\ \frac{dT_2}{dt}\\ \frac{dT_3}{dt}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{2\pi rhL}{3} & -\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{\pi rhL}{3} & 0\\ -\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{\pi rhL}{3} & \frac{sK_{xx}}{L}+\frac{2\pi rhL}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-qs+\pi rhLT_\infty\\ \pi rhLT_\infty\\ 0\end{pmatrix},$$

а для второго интервала:

$$\frac{\lambda SL}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT_3}{dt} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{sK_{xx}}{L}+\frac{2\pi rhL}{3} & -\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{\pi rhL}{3} \\ 0 & -\frac{sK_{xx}}{L}+\frac{\pi rhL}{3} & \frac{sK_{xx}}{L}+\frac{2\pi rhL}{3}+hs \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ \pi rhLT_{\infty} \\ \pi rhLT_{\infty}+hsT_{\infty} \end{pmatrix}.$$

Объединяя эти две системы линейных дифференциальных уравнений, получим (8).

Таким образом, вариационный подход и метод Галеркина при решении нестационарной задачи распространения тепла в стержне приводят к одинаковым системам дифференциальных уравнений и, следовательно, к одинаковым решениям.

Список литературы

1. Larry J. Segerlind. Applied Finite Element Analysis, 2nd Edition. 448 p., February 1985, 1984.

2. Bokhove O. and J.J.W. van der Vegt, Introduction to (dis)continuous Galerkin finite element methods, Department of Applied Mathematics, University of Twente, 2008.