

УДК 371.3:372.851

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ НЕИЗВЕСТНЫЕ – ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Далингер В.А.

ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», Омск,

e-mail: dalinger@omgpu.ru

В статье рассматривается особый вид текстовых задач, в которых неизвестные выражаются только целыми числами, вернее сказать – натуральными. К таким задачам относятся задачи, в которых речь идет о количестве человек, о числе станков, задачи о взвешивании, о разбиении числа, о размене и т.д. Ответом в таких задачах могут быть лишь натуральные числа, и это обстоятельство дает подсказку в нахождении плана решения задачи. В предлагаемой статье рассматривается двенадцать задач, которые разноплановы, отражают разные сферы человеческой деятельности (это задачи на нахождение числа людей, числа машин, числа контейнеров, числа книг и т.д.). Решение подобных текстовых задач способствует усвоению предметных математических знаний, таких как работа с величинами, работа с текстами таблиц, установление взаимосвязей различных величин, отработка вычислительных навыков, формирование логической грамотности; а также служит развитию личностных качеств учащихся, таких как развитие познавательной активности, интереса к познанию математики, навыки контроля и самоконтроля и т.д. Работа с текстовыми задачами отвечает многим требованиям новых образовательных стандартов, в частности формированию универсальных учебных действий.

Ключевые слова: текстовые задачи, целочисленное неизвестное, способы решения задач с целыми неизвестными

TEXT TASKS, IN WHICH UNKNOWN – INTEGERS

Dalinger V.A.

Omsk State Pedagogical University, Omsk, e-mail: dalinger@omgpu.ru

In article persons the type of text tasks in which unknown say only by integers, to tell more true – natural is considered. Tasks in which it is about a number of people, about number of machines, tasks about weighing, about splitting number, about exchange, etc. belong to such tasks. Only natural numbers can be the answer in such tasks, and this circumstance gives the hint in finding of the plan of the solution of a task. In the offered article twelve tasks which are versatile are considered, reflect different spheres of human activity (these are tasks on finding of number of people, numbers of cars, numbers of containers, numbers of books, etc). The solution of similar text tasks promotes assimilation of subject mathematical knowledge, such as work with sizes, work with texts of tables, establishment of interrelations of various sizes, working off of computing skills, formation of logical literacy; and also serves development of personal qualities of pupils, such as development of informative activity, interest in knowledge of mathematics, skills of control and self-checking, etc. Work with text tasks meets many requirements of new educational standards, in particular formation of universal educational actions.

Keywords: text tasks, integer unknown, ways of the solution of tasks with the whole unknown

Есть множество задач, ответом к которым являются только целые числа. Их называют задачами в целых числах. К ним относятся: уравнения в целых числах (диофантовы уравнения); классические задачи в целых числах (задача о взвешивании, задача о разбиении числа, задача о размене, задача о четырех квадратах), текстовые сюжетные задачи, в которых неизвестные есть целые числа и др. [1–6].

Среди указанных типов задач особую значимость имеют задачи об уравнениях, решаемых в целых числах. Это один из наиболее интересных разделов теории чисел [7–9].

Решение уравнений в целых числах до конца изучено только для уравнений с двумя неизвестными, но это проблематично для уравнений выше второй степени с двумя или более неизвестными.

В данной статье мы рассмотрим решение текстовых сюжетных задач, в которых неизвестные должны выражаться только в целых

числах. Причем их однозначное решение возможно лишь при условии существенного использования этого обстоятельства.

Перейдем к решению текстовых задач, в которых требуется сделать выбор, основанный на отборе соответствующих целых чисел.

Задача 1. В группе учатся меньше 50 студентов. За индивидуальную работу

$\frac{1}{7}$ часть студентов получила оценку «5»,

$\frac{1}{3}$ – «4», а половина студентов получила

оценку «3». Остальные работы были оценены оценкой «2». Сколько было студентов, индивидуальные работы которых были оценены неудовлетворительной оценкой?

Решение

Число студентов всегда выражается целым числом. Значит, нам надо найти такое натуральное число меньше 50 и одновре-

менно делящееся на 7, 3, 2. Единственно возможным таким числом будет число 42.

Решение можно оформить так: пусть x – число студентов. Тогда по условию задачи имеем $\frac{1}{7}x = \frac{x}{7}$ – студентов получили

оценку «5»; $\frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$ – студентов получили

оценку «4»; $\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$ – студентов получили

оценку «3». Так как x должен одновременно делиться на 7, 3, 2, то таким числом, меньшим 50, будет число 42.

Решение этой задачи можно оформить и так:

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6+14+21}{42} = \frac{41}{42}.$$

Числитель дроби – число 41 показывает, какое количество студентов получили оценки «5», «4», «3», а знаменатель – число 42 показывает общее количество студентов. И отсюда можно заключить, что оценку «2» получил 1 студент.

Ответ: 6 студентов получили оценку «5»; 14 студентов получили оценку «4»; 21 студент получил оценку «3»; 1 студент получил оценку «2».

Задача 2. Опрос учеников одной из школ выяснил, что 68 % учащихся знают год рождения М.Ю. Лермонтова, $\frac{5}{18}$ учащихся умеют доказывать теорему Пифагора, $\frac{23}{30}$ учащихся любят ходить в кино и 512 учащихся читали сказку А.С. Пушкина «Руслан и Людмила».

Найдите наименьшее возможное число учащихся в этой школе.

Решение

Пусть x – число учащихся в школе, тогда имеем $\frac{68x}{100} = \frac{17x}{25}$, $\frac{5x}{18}$, $\frac{23x}{30}$. Так как x – это число учащихся, то это число должно выражаться натуральным числом. Из того, что 17 нацело не делится на 25, 5 нацело не делится на 18, 23 нацело не делится на 30, следует, что на эти числа нацело должен делиться x .

Так как $25 = 5^2$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Значит, x должен делиться на $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$.

Но так как по условию задачи $x \geq 512$, то наименьшее возможное число учащихся в этой школе равно 900.

Решение этой задачи может быть построено и таким образом, как это описано в решении первой задачи.

Ответ: 900 учащихся.

Задача 3. Три друга купили 13 пирожков, причем Алексей купил в два раза меньше Ивана, а Володя – больше Алексея, но меньше Ивана. Сколько пирожков купил каждый из них?

Решение

Пусть Алексей купил x пирожков, а Володя – y . Тогда Иван купил $2x$ пирожков. Получаем смешанную систему, составленную из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} 3x + y = 13, \\ x < y < 2x. \end{cases}$$

Так как $x < y < 2x$, то, прибавляя ко всем частям этого неравенства по $3x$, будем иметь $4x < y + 3x < 5x$, $4x < 13 < 5x$.

$$\text{Отсюда следует, что } \begin{cases} 4x < 13, \\ 5x > 13. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получаем

$$2\frac{3}{5} < x < 3\frac{1}{4}.$$

Тогда $x = 3$, $2x = 6$. Найдем y :

$$3x + y = 13, 9 + y = 13, y = 4.$$

Проверим еще, выполняется ли неравенство $x < y < 2x$: $3 < 4 < 6$. Следовательно, неравенство выполняется.

Ответ: Алексей – 3 пирожка, Володя – 4 пирожка, Иван – 6 пирожков.

Задача 4. Два акционерных общества направили грузовые самосвалы для перевозки сельскохозяйственной продукции общим числом менее 18. Число самосвалов, отправленных вторым акционерным обществом, меньше удвоенного числа самосвалов, отправленных первым акционерным обществом. Если бы первое акционерное общество отправило на 4 самосвала больше числа самосвалов, отправленного вторым акционерным обществом, то все равно это число было бы меньше числа самосвалов, отправленных вторым акционерным обществом. Сколько самосвалов отправило каждое акционерное общество?

Решение

Пусть x и y – число самосвалов, отправленных соответственно первым и вторым акционерными обществами. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y < 18, \\ y < 2x, \\ x + 4 < y. \end{cases}$$

Так как $x + 4 < y$, $y < 2x$, то

$$x + 4 < 2x, x > 4.$$

Так как $x + 4 < y$, $y < 18 - x$ (из первого неравенства системы), то

$$x + 4 < 18 - x, 2x < 14, x < 7.$$

Тогда $4 < x < 7$. Следовательно, $x = 5$ или $x = 6$. Рассмотрим оба случая.

1. Пусть $x = 5$. Система неравенств принимает такой вид:

$$\begin{cases} 5 + y < 18, \\ y < 10, \\ 5 + 4 < y. \end{cases}$$

Отсюда $9 < y < 10$, а это невозможно.

2. Пусть $x = 6$. Получаем

$$\begin{cases} 6 + y < 18, \\ y < 12, \\ 6 + 4 < y. \end{cases}$$

Тогда $10 < y < 12$. Следовательно, $y = 11$.

Ответ: 6 самосвалов и 11 самосвалов.

Задача 5. Имеются ящики двух видов: по 130 кг и 160 кг. Сколько было ящиков первого и сколько второго вида, если груз, помещенный в них, весит 3 тонны? Укажите все решения.

Решение

Обозначим количество ящиков первого вида через x , второго – через y . Получаем уравнение $130x + 160y = 3000$, $13x + 16y = 300$.

Попробуем воспользоваться делимостью на 13. Для этого $16y$ представим в виде $13y + 3y$, а 300 разделим на 13 с остатком:

$$13x + 13y + 3y = 13 \cdot 23 + 1, \quad 3y - 1 = 13 \cdot 23 - 13x - 13y.$$

Так как правая часть последнего уравнения делится на 13, то на это же число должна делиться и его левая часть. Чтобы найти значения y , при которых разность $3y - 1$ делится на 13, применим метод перебора. При этом проще не придавать неизвестной y последовательные значения 1, 2, 3 и т.д., а приравнивать $3y - 1$ к числам, делящимся на 13: 13, 26, 39, 52, 65 и т.д., выясняя каждый раз, является ли корень соответствующего уравнения целым или дробным. Целые корни получаются в следующих случаях:

$$3y - 1 = 26, y = 9; \quad 3y - 1 = 65, y = 22$$

и др. Но уже значение $y = 22$ слишком велико, так как в этом случае

$$16y = 16 \cdot 22 = 352 > 300.$$

При значении $y = 9$ из уравнения можно найти x :

$$13x + 16 \cdot 9 = 300, \quad 13x = 156, \quad x = 12.$$

Ответ: 12 ящиков по 130 кг и 9 ящиков по 160 кг.

Задача 6. В классе провели контрольную работу по математике. Средняя оценка мальчиков – 3,8; девочек – 3,5; класса – $3\frac{8}{13}$.

Сколько человек писало контрольную работу, если их больше 20 и меньше 30.

Решение

Пусть в классе x мальчиков и y девочек, тогда, согласно условию задачи, имеем

$$\frac{3,8x + 3,5y}{x + y} = 3\frac{8}{13},$$

или

$$\begin{aligned} 3,8 \cdot 13x + 3,5 \cdot 13y &= 47x + 47y, \\ x(3,8 \cdot 13 - 47) &= y(47 - 3,5 \cdot 13), \end{aligned}$$

откуда $x = \frac{5}{8}y$.

Количество детей, писавших контрольную работу, равно $y + \frac{5}{8}y = \frac{13}{8}y = 13 \cdot \frac{y}{8}$, где $\frac{y}{8}$ – целое число (произведение двух чисел, одно из которых простое, будет целым, если и второе число целое).

Заметим, что существует единственное целое $k = 2 \left(k = \frac{y}{8} \right)$, такое, что $20 < k < 30$.

Значит, контрольную работу писали 26 учеников.

Ответ: 26 учеников.

Задача 7. Купили по одной цене несколько карандашей и по одной и той же цене несколько ручек. За карандаши заплатили 10 р. 56 к. Известно, что карандашей купили на шесть больше, чем ручек, а цена карандаша более чем на 1 рубль превосходит цену ручки. Сколько купили карандашей?

Решение

Из условия видно, что карандашей купили не менее семи и цена карандаша больше одного рубля. Отсюда следует, что карандашей не более десяти (иначе за них заплатили бы больше 11 руб.). Таким образом, количество купленных карандашей – одно из чисел 7, 8, 9, 10. Кроме того, цена одного карандаша в копейках – натуральное число, следовательно, 1056 делится нацело на одно из чисел 7, 8, 9, 10. Из них только число 8 является делителем числа 1056, значит, купили 8 карандашей.

Ответ: 8 карандашей.

Задача 8. В сарае имеются гуси и кролики. Всего у этих гусей и кроликов 50 голов и 140 ног. Сколько гусей и сколько кроликов имеется в сарае?

Решение

Пусть в сарае x гусей и y – кроликов. Тогда имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 2x + 4y = 140. \end{cases}$$

Сократив обе части второго уравнения на 2, будем иметь

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ x + 2y = 70. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения системы первое, получим $y = 20$; тогда $x = 30$.

Ответ: 20 кроликов, 30 гусей.

Задача 9. В аудитории присутствуют преподаватель и несколько обучающихся. Найти число обучающихся, если известно, что возраст преподавателя на 24 года больше среднего возраста обучающихся и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в аудитории.

Решение

Пусть x – средний возраст обучающегося, y – количество обучающихся.

Запишем уравнение, которое мы составим по условию задачи (читателю следует объяснить, как оно составлено).

$$\frac{xy + x + 24}{y + 1} + 20 = x + 24.$$

Так как $y + 1 \neq 0$, то мы можем обе части уравнения умножить на это выражение. Будем иметь

$$\begin{aligned} xy + x + 24 + 20y + 20 &= xy + 24y + x + 24, \\ 4y &= 20, \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Ответ: 5 обучающихся.

Задача 10. Встретились два математика: Петров и Сидоров. Сидоров сказал: «Мы с тобой давно не встречались, а потому я не знаю, как у тебя сложилась семейная жизнь». Петров ответил: «У меня три сына, и, зная, что ты тоже математик, их возраст узнай сам. Даю условие: произведение их возрастов равно 36». Сидоров, подумав, ответил: «Мне не хватает данных». Петров добавляет: «Сумма их возрастов равна номеру уходящего трамвая». Сидоров, взглянув на трамвай, ответил: «Мне хватает данных». Петров сказал: «Забыл тебе сказать, что у старшего сына волосы рыжие». Сидоров ответил: «Теперь я все понял!» и назвал возраст сыновей. Какого возраста сыновья Петрова?

Решение

Перебрав все возможные произведения трех натуральных чисел (делители числа 36) Сидоров получил:

$$1 \cdot 1 \cdot 36 = 36; 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36; 2 \cdot 2 \cdot 9 = 36;$$

$$3 \cdot 12 \cdot 1 = 36; 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36; 6 \cdot 6 \cdot 1 = 36;$$

$$2 \cdot 18 \cdot 1 = 36; 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36.$$

Конечно, получив восемь различных вариантов, Сидоров указал на недостаточность информации.

Сообщение о сумме возрастов сыновей, которая равна номеру трамвая, заставило Сидорова просуммировать полученные варианты чисел:

$$1 + 1 + 36 = 38; 2 + 3 + 6 = 11;$$

$$2 + 2 + 9 = 13; 3 + 12 + 1 = 16; 3 + 3 + 4 = 10;$$

$$6 + 6 + 1 = 13; 2 + 18 + 1 = 21; 4 + 1 + 9 = 36.$$

Сидоров сообщает о недостаточности данных, так как трамвай был номером 13 (число 13 дают два различных набора чисел: 2, 2, 9 и 6, 6, 1 и, какой из них взять, неизвестно – под первые два условия подходят оба).

Сообщение о старшем сыне (ключевое слово «старший», а не слово, сообщающее о цвете волос), позволяет Сидорову ответить на заданный вопрос: двум сыновьям по 2 года, а одному 9 лет.

В наших работах [2, 10, 11] и в работах [12, 13] читатель найдет много других интересных задач, решаемых в целых числах.

Список литературы

1. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: учебное пособие для учащихся 7–11 классов / Е.В. Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2005. – 271 с.
2. Далингер В.А. Задачи в целых числах: учебное пособие / В.А. Далингер. – М.: Илекса, 2013. – 112 с.
3. Кордемский Б.А. Этому виду задач более 1600 лет / Б.А. Кордемский // Квант. – 1985. – № 4. – С. 13–16.
4. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10–11 классов / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 477 с.
5. Латанова Н.И. Решение уравнений в целых числах: учебное пособие / Н.И. Латанова, А.П. Власова, Н.В. Евсеева. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 75 с.
6. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Ч. 1: Теория чисел. Алгебра / Е.В. Хорошилова. – М.: Изд-во Московского университета, 2010. – 472 с.
7. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ. – М.: Интеллект-Центр, 2011. – 204 с.
8. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика: Введение в теорию чисел / Г. Дэвенпорт; пер. с англ., под ред. Ю.В. Линника. – М.: Книжный дом «Либроком», 2010. – 176 с.
9. Буфеев С.В. Коллекция задач по арифметике целых чисел. Задания С6 ЕГЭ: Учебное пособие / С.В. Буфеев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 344 с.
10. Далингер В.А. Метод перебора в решении уравнений в целых числах / В.А. Далингер // Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: межвузовский сборник научных трудов. Выпуск 26 / Под ред. М.В. Егуловой, Л.И. Боженковой. – М.: ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», Изд-во АКФ «Политоп», 2017. – С. 54–57.
11. Далингер В.А. Задачи на перебор: учебное пособие / В.А. Далингер, С.Д. Симонженков. – Омск: Изд-во ООО «Амфора», 2011. – 249 с.
12. Ященко И.В. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания / И.В. Ященко, С.А. Шестаков, П.И. Захаров. – М.: МЦНМО, 2009. – 243 с.
13. Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / А.П. Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова и др. – М.: АСТ: Астрель, 2010. – 318 с.