УДК 532.516

ЗАТУХАЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ СТЕНКАМИ

[1,2]Сенницкий В.Л.

[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;

[2]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: sennitskii@yandex.ru

Поставлена и решена задача о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости между абсолютно твердыми стенками. Силовые воздействия, поддерживающие движение жидкости, отсутствуют; движение жидкости является затухающим. Найдено точное решение задачи. Определены интегральные параметры течения жидкости. Получены асимптотические формулы, характеризующие рассматриваемую гидромеханическую систему на больших временах. Задачи о плоском движении вязкой жидкости в присутствии твердых стенок неизменно входят в число актуальных задач гидромеханики. Результаты исследований плоских течений представляют самостоятельный интерес, а также могут служить в качестве важных ориентиров при изучении пространственных течений. В частности, в связи с этим является актуальным эффективный поиск новых адекватных гидромеханических задач. Одно из перспективных направлений в механике вязкой жидкости, включающее такой поиск, состоит в изучении эволюции гидромеханических систем после прекращения силовых воздействий, поддерживающих их движение. Особая роль в таких исследованиях принадлежит нахождению точных решений задач механики вязкой жидкости. Актуальность работ в данной научной области, в частности, обусловлена их очевидной прикладной значимостью, наличием связи с широким спектром явлений и процессов.

Ключевые слова: асимптотические формулы, остаточная масса жидкости, твердые стенки, стационарное периодическое затухающее течение, вязкая жидкость

THE RELAXING FLOW OF A VISCOUS LIQUID BETWEEN SOLID WALLS

[1,2]Sennitskiy V.L.

[1]Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk;

[2]Novosibirsk State University, Novosibirsk, e-mail: sennitskii@yandex.ru

The problem on a plane flow of a viscous incompressible liquid between absolutely solid walls is stated and solved. Force interactions supporting the liquid motion are absent; the liquid motion is relaxing. The exact solution of the problem is found. Integral parameters of the liquid flow are determined. The asymptotic formulas are obtained which characterize the hydro-mechanical system under consideration at large time. Problems on plane flows of a viscous liquid in the presence of solid walls are invariably in the number of actual problems of hydro-mechanics. The results of investigations of plane flows are of an independent interest and also can serve as important orienting points under the study of spatial flows. In particular in this connection it is actual an effective search of new adequate hydro-mechanical problems. One of perspective directions of viscous fluid mechanics involving such search consists in a study of the evolution of hydro-mechanical systems under a cessation of force influences supporting their motion. An especial role in such investigations belongs to exact solutions finding of the problems of viscous fluid mechanics. The actuality of works in this scientific field in particular is caused by their obvious applied significance and the presence of their connection with a wide spectrum of phenomena and processes.

Keywords: asymptotic formulas, remaining mass of liquid, solid walls, stationary periodical relaxing flows, viscous liquid

Выявлению закономерностей движения жидкости в присутствии твердых стенок посвящено значительное число исследований (см., например, [1, 2], а также [3–5], и представленную там литературу).

В данной работе рассматривается гидромеханическая система, состоящая из вязкой несжимаемой жидкости и абсолютно твердых стенок Ξ_1, Ξ_2. Стенки покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат XYZ. Стенка Ξ_1 ограничена плоскостью Γ_1: $Y = 0$; стенка Ξ_2 – плоскостью Γ_2: $Y = H$ ($H > 0$ – постоянная). Жидкость заполняет область Ω: $0 < Y < H$. В начальный момент времени t, при $t = 0$, течение жидкости является симметричным относительно плоскости $Y = H / 2$; жидкость движется со скоростью $\mathbf{V}_0 = \{V_0(Y), 0, 0\}$ ($V_0(Y) = V_0(H - Y)$; $V_0 = 0$ на Γ_1, Γ_2).

Цель данной работы состоит в определении скорости жидкости $\mathbf{V} = \{V(Y, t), 0, 0\}$, а также силового взаимодействия жидкости и стенок, средней скорости жидкости, массопереноса жидкости – при $t > 0$.

Общая задача

Пусть $y = Y / H$; $\hat{V} = \left|V_0\right|_{|\,Y=H/2}$, если $V_{0|\,Y=H/2} \neq 0$, $\hat{V} = \sup\left|\mathbf{V}_0\right|$, если $V_{0|\,Y=H/2} = 0$; $\tau = \hat{V} t / H$; $v_0 = V_0 / \hat{V}$; $v = V / \hat{V}$; ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathrm{Re} = H\hat{V}/\nu$ – число Рейнольдса.

Уравнение Навье – Стокса и условия, которые должны выполняться на границах стенок и в начальный момент времени, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(0 < y < 1\right); \qquad (1)$$

$$v = 0 \text{ при } y = 0; \qquad (2)$$

$$v = 0 \text{ при } y = 1; \qquad (3)$$

$$v = v_0 \text{ при } \tau = 0. \qquad (4)$$

Отметим, что при $t > 0$ какие-либо воздействия на жидкость, поддерживающие ее движение, отсутствуют.

Наряду с задачей (1)–(4) будем рассматривать также вспомогательную задачу

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(0 < y < 2\right); \qquad (5)$$

$$w = 0 \text{ при } y = 0; \qquad (6)$$

$$w = 0 \text{ при } y = 2; \qquad (7)$$

$$w = w_0 \text{ при } \tau = 0. \qquad (8)$$

Здесь w_0 – периодическая с периодом 2 функция y, которая при $0 \le y \le 2$ определяется формулой

$$w_0 = \begin{cases} v_0(y) \text{ при } 0 \le y \le 1\ ; \\ -v_0(y-1) \text{ при } 1 \le y \le 2\ . \end{cases} \qquad (9)$$

Обратимся к задаче (5)–(7). Применяя метод разделения переменных, найдем, что уравнение (5) имеет последовательность решений

$$w = w_m = e^{-\frac{m^2\pi^2\tau}{4Re}} \sin\frac{m\pi y}{2}\left(m = 1, 2, \ldots\right), \qquad (10)$$

каждое из которых удовлетворяет условиям (6), (7). Используя (10), построим следующее решение задачи (5)–(7):

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\frac{m^2\pi^2\tau}{4Re}} \sin\frac{m\pi y}{2}, \qquad (11)$$

где c_m $(m = 1, 2, \ldots)$ – постоянные.

Рассмотрим условие (8). Представим $w_0(y)$ в виде ряда Фурье. С учетом (9) и соотношения

$$v_0(y) = v_0(1 - y) \qquad (12)$$

получим

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} v_{2n-1} \sin\left[\left(2n-1\right)\pi y\right]. \qquad (13)$$

Здесь

$$v_{2n-1} = 2\int_0^1 v_0(y) \sin\left[\left(2n-1\right)\pi y\right]\, dy \left(n = 1, 2, \ldots\right).$$

Используя (11), (13) и формулу

$$\int_0^2 \sin\frac{m\pi y}{2} \sin\left[\left(2n-1\right)\pi y\right] dy = \delta_m^{2(2n-1)} \left(m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots\right),$$

найдем

$$c_m = v_{2n-1}\, \delta_m^{2(2n-1)} \ (m = 1, 2, \ldots ;\ n = 1, 2, \ldots). \qquad (14)$$

Из (11), (14) следует, что w (решение задачи (5) – (8)) удовлетворяет условию

$$w = 0 \text{ при } y = 1. \qquad (15)$$

Таким образом, согласно (1)–(9), (11), (14), (15) задача (1)–(4) имеет решение

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{Re}} \sin\left[\left(2n-1\right)\pi y\right]. \qquad (16)$$

Формулой (16), в частности, демонстрируется, что изучаемое течение жидкости является затухающим.

Пусть ρ – плотность жидкости; γ_1 – площадка площадью S_γ, принадлежащая плоскости Γ_1; γ_2 – площадка площадью S_γ, принадлежащая плоскости Γ_2; $\mathbf{F}_{lw1} = \{F_{lw1}, 0, 0\}$ – тангенциальная сила, действующая со стороны жидкости на часть ξ_1 стенки Ξ_1, граничащую с жидкостью на площадке γ_1 $\left(F_{lw1} = \rho\nu\left(\partial V / \partial Y\right)_{|\,Y=0} S_\gamma\right)$; $\mathbf{F}_{wl1} = \{F_{wl1}, 0, 0\}$ – тангенциальная сила, действующая со стороны части ξ_1 стенки Ξ_1 на жидкость; $\mathbf{F}_{lw2} = \{F_{lw2}, 0, 0\}$ – тангенциальная сила, действующая со стороны жидкости на часть ξ_2 стенки Ξ_2, граничащую с жидкостью на площадке γ_2 $\left(F_{lw2} = -\rho\nu\left(\partial V/\partial Y\right)_{|\,Y=H} S_\gamma\right)$; $\mathbf{F}_{wl2} = \{F_{wl2}, 0, 0\}$ – тангенциальная сила, действующая со стороны части ξ_2 стенки Ξ_2 на жидкость; $f_{lwk} = HF_{lwk} / (\rho\nu\hat{V}S\gamma)$, $f_{wlk} = HF_{wlk} / (\rho\nu\hat{V}S\gamma)$ $(k = 1, 2)$; σ – площадка: $X = X^*$, $0 \le Y \le H$, $-Z^*/2 \le Z \le Z^*/2$ (X^*, $Z^* > 0$ – постоянные); $S_\sigma = H Z^*$;

$$\bar{\mathbf{V}} = \left\{\bar{V}, 0, 0\right\} = \frac{1}{H}\int_0^Y \mathbf{V}dY \tag{17}$$

– среднее значение скорости $\mathbf{V}$ по координате Y; $\bar{v} = \bar{V} / \hat{V}$.

Используя (16), (17), получим

$$f_{lw1} = f_{lw2} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)\, v_{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{Re}}$$

$$(f_{wl1} = -f_{lw1},\ f_{wl2} = -f_{lw2}); \tag{18}$$

$$\bar{v} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)^{-1}\, v_{2n-1}\, e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{Re}}. \tag{19}$$

Формулой (18) определяется силовое взаимодействие жидкости и стенок (вопрос о нормальном силовом взаимодействии жидкости и стенок является тривиальным).

Движение жидкости сопровождается переносом ее массы. Мерой происходящего массопереноса может служить остаточная масса жидкости

$$M = \rho S_\sigma\int_0^t \bar{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{e}_X\, dt' \tag{20}$$

– масса жидкости, которая протекает через площадку σ из области $X < X^*$ в область $X > X^*$ за промежуток времени $0 \div t$ ($\mathbf{e}_X = \{1, 0, 0\}$) . Используя (17), (19), (20), найдем

$$\mu = \frac{M}{\rho H S_\sigma} = \frac{2Re}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)^{-3}\, v_{2n-1}\left[1 - e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{Re}}\right]. \tag{21}$$

Из (16), (18), (19), (21) следуют асимптотические формулы, характеризующие рассматриваемую гидромеханическую систему на больших временах

$$v = e^{-\frac{\pi^2\tau}{Re}}\left[v_1\sin\left(\pi y\right) + O\left(e^{-\frac{8\pi^2\tau}{Re}}\right)\right] \text{ при } \tau \to \infty; \tag{22}$$

$$f_{lw1} = f_{lw2} = e^{-\frac{\pi^2\tau}{Re}}\left[\pi v_1 + O\left(e^{-\frac{8\pi^2\tau}{Re}}\right)\right] \text{ при } \tau \to \infty; \tag{23}$$

$$\bar{v} = e^{-\frac{\pi^2\tau}{Re}}\left[\frac{2v_1}{\pi} + O\left(e^{-\frac{8\pi^2\tau}{Re}}\right)\right] \text{ при } \tau \to \infty; \tag{24}$$

$$\mu = \frac{M_\infty}{\rho H S_\sigma} - e^{-\frac{\pi^2\tau}{Re}}\left[\frac{2Re v_1}{\pi^3} + O\left(e^{-\frac{8\pi^2\tau}{Re}}\right)\right] \text{ при } \tau \to \infty. \tag{25}$$

Здесь

$$M_\infty = \frac{2\mathrm{Re}}{\pi^3}\rho H S_\sigma \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-3} v_{2n-1}. \quad (26)$$

– полная остаточная масса жидкости (предел M при $t \to \infty$). Отметим, что ряд в (26) является абсолютно сходящимся (данный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-3}$).

Первая частная задача

Пусть жидкость совершает движение со скоростью $\mathbf{U} = \{U, 0, 0\}$, не изменяющейся со временем; задача о течении жидкости имеет вид

$$0 = \eta + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\ (0 < Y < H); \quad (27)$$

$$U = 0 \text{ при } Y = 0; \quad (28)$$

$$U = 0 \text{ при } Y = H. \quad (29)$$

Здесь $\eta = -(1/\rho)\,\partial P/\partial X$ – постоянная (P – давление в жидкости; без умаления общности может быть принято, что $\eta > 0$). Использование (27)–(29) приводит к формуле

$$U = \frac{\eta}{2\nu} Y\,(H - Y). \quad (30)$$

Положим

$$V_0 = U. \quad (31)$$

Отметим, что

$$V_0 = \frac{\eta}{2\nu} Y(H - Y)$$

удовлетворяет соотношению (12).

Выполнение (31) соответствует тому, что задачей (1)–(4), определяемым ею течением жидкости моделируется происходящее при $t > 0$ остаточное, не поддерживаемое силовыми воздействиями затухающее течение вязкой жидкости, совершающей при $t \le 0$ движение с не изменяющейся со временем скоростью

$$\mathbf{U} = \left\{\frac{\eta}{2\nu} Y\,(H - Y), 0, 0\right\}.$$

С учетом (16), (17), (19)–(21), (26), (30), (31) для данного (моделирующего) течения жидкости, в частности, имеем

$$V = \frac{4\eta H^2}{\pi^3 \nu}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-3} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{\mathrm{Re}}} \sin\left[(2n-1)\pi y\right];$$

$$M = M_\infty - \frac{8\rho\eta H^4 S_\sigma}{\pi^6 \nu^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-6} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{\mathrm{Re}}}.$$

Здесь

$$M_\infty = \frac{8c\rho\eta H^4 S_\sigma}{\pi^6 \nu^2}, \left(c = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-6} \approx 1\right).$$

Вторая частная задача

Пусть жидкость совершает движение со скоростью $\mathbf{U}_2 = \{U_2, 0, 0\}$, периодически изменяющейся со временем; задача о течении жидкости имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \eta + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\ (0 < Y < H); \quad (32)$$

$$U = 0 \text{ при } Y = 0; \quad (33)$$

$$U = 0 \text{ при } Y = H. \quad (34)$$

Здесь $\eta = \xi\,[1 + \sin(2\pi t / T + \varphi)]$ ($\xi, T > 0$. $0 \le \varphi < 2\pi$ – постоянные; без умаления общности может быть принято, что $\xi > 0$). Использование (32)–(34) приводит к формуле

$$U = \frac{\xi}{2\nu}\left[Y(H - Y) + \varkappa^{-2}\mathrm{Real}\left(\chi\, e^{i\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)}\right)\right], \quad (35)$$

где $\chi = \{\mathrm{sh}[(1 + i)\varkappa Y] + \mathrm{sh}[(1 + i)\varkappa(H - Y)] - \mathrm{sh}[(1 + i)\varkappa H]\} / \mathrm{sh}[(1 + i)\varkappa H]$; $\varkappa = \sqrt{\dfrac{\pi}{\nu T}}$.

Положим

$$V_0 = U_{|t=0}. \quad (36)$$

Отметим, что

$$V_0 = \frac{\xi}{2\nu}\left[Y(H-Y) + \varkappa^{-2}\mathrm{Real}\left(\chi\, e^{i\varphi}\right)\right]$$

удовлетворяет соотношению (12) .

Выполнение (36) соответствует тому, что задачей (1) – (4), определяемым ею течением жидкости моделируется происходящее при $t > 0$ остаточное, не поддерживаемое силовыми воздействиями затухающее течение вязкой жидкости, совершающей при $t \le 0$ движение с периодически изменяющейся со временем скоростью

$$\mathbf{U} = \left\{ \frac{\xi}{2\nu}\left[Y(H-Y) + \varkappa^{-2}\,\mathrm{Real}\left(\chi\, e^{i\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)}\right)\right], 0, 0\right\}.$$

С учетом (16), (17), (19)–(21), (26), (35), (36) для данного (моделирующего) течения жидкости, в частности, имеем

$$V = \frac{4\xi H^2}{\pi^3\nu}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-3}\,\Psi\, e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{\mathrm{Re}}}\sin\left[(2n-1)\pi y\right];$$

$$M = M_\infty - \frac{8\rho\xi H^4 S_\sigma}{\pi^6\nu^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-6}\,\Psi\, e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2\tau}{\mathrm{Re}}};$$

Здесь

$$M_\infty = \frac{8\rho\xi H^4 S_\sigma}{\pi^6\nu^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-6}\,\Psi;$$

$\Psi = 1 + \frac{\sin(\varphi - \varphi_{2n-1})}{\sqrt{1+\lambda_{2n-1}^2}}$ ($\lambda_{2n-1} = 2H^2 / [(2n-1)^2\pi\nu T]$; $0 < \varphi_{2n-1} < \pi/2$ ($n = 1, 2, \ldots$) – углы, удовлетворяющие соотношениям $\sin\varphi_{2n-1} = \frac{\lambda_{2n-1}}{\sqrt{1+\lambda_{2n-1}^2}}$, $\cos\varphi_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_{2n-1}^2}}$.

Заключение

Исследованное течение жидкости является аналогом пространственного течения вязкой жидкости в бесконечно длинной круговой цилиндрической трубе. В моменты времени, следующие за начальным, жидкость не испытывает каких-либо силовых воздействий, поддерживающих ее движение. Ввиду этого представляют очевидный интерес, могут быть отмечены постановка вопроса об остаточной массе жидкости, установление зависимости этой величины от времени и параметров гидромеханической системы, определение полной остаточной массы жидкости – важной характеристики рассмотренной гидромеханической системы. Полученные результаты могут найти применение при разработке новых приборов, устройств, содержащих жидкости, могут использоваться при изучении проблем биологии, медицины, связанных с движением жидких сред, в частности проблем патологии и нормы кровообращения [6].

Список литературы

1. Сенницкий В.Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.

2. Сенницкий В.Л. Движение вязкой жидкости и стенки в присутствии покоящейся стенки // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 2. С. 76–82. DOI: 10.15372/PMTF20160208.

3. Аристов С.Н., Князев Д.В. Течения вязкой жидкости между подвижными параллельными плоскостями // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 4. С. 55–61.

4. Петров А.Г. Точное решение уравнений Навье – Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 5. С. 13–18.

5. Петров А.Г. О точных и асимптотических решениях уравнений Навье – Стокса в слое жидкости между сближающимися и удаляющимися плачтинами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 2. С. 44–57.

6. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.