

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ РЕЖИМ АВТОРЕЗОНАНСА В КВАНТОВОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

Баталов С.В., Шагалов А.Г.

*Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, e-mail: svbatalov@imp.uran.ru,
shagalov@imp.uran.ru*

Рассмотрены особенности квазиклассического авторезонансного возбуждения конденсата Бозе – Эйнштейна в квазиодномерной ангармонической ловушке. Показано, что с увеличением числа частиц в конденсате зависимость вероятности захвата фазы (авторезонанса) от амплитуды накачки стремится к ступенчатой функции, характерной для классического нелинейного осциллятора. При малом числе частиц вероятность авторезонанса плавно увеличивается с ростом амплитуды накачки. Такая зависимость объясняется неустойчивостью начального когерентного состояния конденсата при малом числе частиц, исчезающей в пределе большого числа частиц. Этот эффект аналогичен уменьшению размера области перехода к авторезонансу с ростом плотности частиц, наблюдавшемуся экспериментально в электронной плазме и, по-видимому, является универсальным свойством систем большого числа взаимодействующих частиц. Результаты работы могут найти применение при создании высокочувствительных детекторов на основе авторезонанса, пригодных, например, для считывания состояния кубита в квантовой вычислительной машине. В отличие от предложенных ранее детекторов на основе контакта Джозефсона, а также детекторов на основе метастабильных состояний, при данном подходе разрешение детектора быстро увеличивается с ростом числа частиц в конденсате, а не ограничивается принципом Паули.

Ключевые слова: конденсат Бозе – Эйнштейна, уравнение Гросса – Питаевского, авторезонанс

QUASICLASSICAL REGIME OF AUTORESONANCE IN QUANTUM OSCILLATOR

Batalov S.V., Shagalov A.G.

Institute of Metal Physics, UB RAS, Ekaterinburg, e-mail: svbatalov@imp.uran.ru, shagalov@imp.uran.ru

Quasiclassical dynamics of Bose-Einstein condensate trapped in quasi-unidimensional anharmonic trap is considered. It is shown that the probability of capture into autoresonance tends to step-like function of driving amplitude as the number of condensed particles increases. For small number of particles capture probability smoothly increases with driving amplitude. We attribute this behavior to instability of the initial coherent state of the dilute condensate which vanishes as the number of particles increases. This is similar to the reduction of autoresonance transition region observed in dense electron plasma and likely to be a universal phenomenon for systems with large number of interacting particles. The results of the work can be used to create highly sensitive detectors based on autoresonance, suitable, for example, for reading the state of a qubit in a quantum computer. In contrast to the previously proposed detectors based on the Josephson junction, as well as detectors based on metastable states, with this approach the resolution of the detector rapidly increases with the number of particles in the condensate, and is not limited by the Pauli principle.

Keywords: Bose-Einstein condensate, Gross-Pitaevskii equation, autoresonance

Уникальные свойства бозе-эйнштейновских конденсатов (БЭК) привлекают значительный интерес в последние десятилетия. Использование резонанса Фешбаха [1], перестраиваемых оптических решеток [2], атомных чипов [3] и т.д. делают БЭК привлекательным объектом для теоретических и экспериментальных исследований в физике многих частиц, создающим базис для развития новых технологий. Новые приложения требуют углубленного понимания нелинейной динамики конденсатов. Наиболее интересной теоретической проблемой является динамика частиц в ангармонических потенциалах (потенциальные «ямы») описывающие квантовые осцилляторы. В данной работе мы предлагаем метод возбуждения квазиодномерного конденсата, захваченного в ангармонической ловушке с основного состояния до высоких энергий в ква-

зиклассическом приближении. Основная идея метода состоит в накачке конденсата возмущениями поля с медленно изменяющейся частотой с использованием идеи авторезонанса. В классическом варианте авторезонансное возбуждение осцилляторов рассматривалось еще в классических работах Векслера и Мак-Миллана [4, 5] и связано с эффектом «захвата» фазы осциллятора внешним переменным полем. В настоящее время авторезонанс имеет приложения в таких различных областях, как гидродинамика [6], физика плазмы [7], магнетизм [8], нелинейная оптика [9] и др. Авторезонанс в БЭК был впервые изучен в [10] случае осциллирующей длины рассеяния. Возбуждение БЭК от основного состояния к первому возбужденному уровню с использованием метода оптимального управления исследовано экспериментально в работе [11].

В данной работе исследование авторезонансного возбуждения проводится в рамках уравнения Гросса – Питаевского

$$i\hbar\Psi_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx} - (U + g|\Psi|^2)\Psi = 0, \quad (1)$$

$$U(x,t) = m\omega_0^2\left(\frac{x^2}{2} - \beta\frac{x^4}{4}\right) + \varepsilon x \cos\varphi(t), \quad (2)$$

где параметр ангармоничности $\beta > 0$. Последний член в уравнении (2) является малым возмущением потенциала с частотой $\omega(t) = d\varphi/dt = \omega_0 - \alpha t$, $\alpha > 0$, медленно уменьшающейся со временем и проходящей через линейную резонансную частоту ω_0 при $t = 0$. Мы предполагаем, что волновая функция нормализована на единицу и, таким образом, параметр g будет пропорционален полному числу частиц в конденсате. Как классический, так и квантовый авторезонанс в линейном аналоге ($g = 0$) уравнения (1) изучался в работе [12]. В данной работе мы сосредоточим внимание на нелинейных эффектах из-за взаимодействия частиц конденсата и дадим новый взгляд на квазиклассические эффекты этого взаимодействия, охватывающие случай большого числа частиц в конденсате, представляющий наибольший интерес с экспериментальной точки зрения.

Результаты исследования и их обсуждение

Используем обозначения статьи [12] для согласования с линейным случаем. Различные динамические режимы в уравнении (1) будем ассоциировать с параметрами P_1, P_2 , использованными в работе [12], и введем новый параметр P_3 , определяющий влияние нелинейности. Эти параметры конструируются из четырех характерных времен задачи: время, обратное частоте Раби $T_R = \sqrt{2m\hbar\omega_0}/\varepsilon$, время изменения частоты $T_S = \alpha^{-1/2}$, характерный временной масштаб ангармоничности $T_A = 3\hbar\beta/(4m\alpha)$ и нелинейности $T_N = g/(\hbar\alpha l)$, где $l = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ есть характерная длина для ангармонического осциллятора. Окончательно безразмерные параметры определяются следующими формулами

$$P_1 = \frac{T_S}{T_R}, \quad P_2 = \frac{T_A}{T_S}, \quad P_3 = \frac{T_N}{T_S}, \quad (3)$$

которые измеряют величину накачки, ангармоничность и нелинейность соответственно.

Вводя безразмерные координату $\xi = x/l$, время $T = \omega_0 t$, скорость изменения частоты

$\tilde{\alpha} = \alpha/\omega_0^2$ и волновую функцию $\Phi = \sqrt{l}\Psi$, перепишем уравнения (1), (2) в виде

$$i\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_{xx} - (\tilde{U} + Q_3|\Phi|^2)\Phi = 0, \quad (4)$$

$$\tilde{U}(\xi, T) = \frac{\xi^2}{2} - Q_2\frac{\xi^4}{4} + Q_1\xi \cos\tilde{\varphi}(T), \quad (5)$$

где $Q_1 = \sqrt{2\tilde{\alpha}}P_1$, $Q_2 = \frac{4}{3}\sqrt{\tilde{\alpha}}P_2$, $Q_3 = \sqrt{\tilde{\alpha}}P_3$ и $\tilde{\varphi} = T - \tilde{\alpha}T^2/2$. В дальнейшем мы будем ограничиваться только случаем положительной нелинейности $P_3 > 0$.

В работе [13] было показано, что в динамической системе (4), (5) квазиклассический режим реализуется при

$$P_2 \ll 1 + P_1 + 0,1P_3, \quad (6)$$

т.е. когда ангармоничность является достаточно слабой. Кроме того, численные исследования показывают необычное поведение функции вероятности перехода системы из основного в возбужденное состояние при авторезонансной накачке. Эта зависимость приведена на рисунке. Хорошо видно быстрое уменьшение ширины области перехода с ростом нелинейности так, что уже при $P_3 > 20$ функция перехода стремится к ступенчатой функции. Этот результат является принципиальным для возможных приложений авторезонансных переходов для целей диагностики и создания высокоточных детекторов. В отличие от линейного случая (отсутствие взаимодействия между частицами) [12], разрешение таких детекторов не ограничивается квантовыми флуктуациями если взаимодействие между частицами достаточно велико (6). Ниже мы дадим теоретическую интерпретацию этого важного эффекта уменьшения ширины перехода в квазиклассическом случае.

Для описания квазиклассического состояния конденсата запишем волновую функцию в виде волнового пакета [14]

$$\Phi(\xi, T) = \frac{1}{\sqrt{w\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{(\xi-X)^2}{2w^2} + iP(\xi-X) + iR(\xi-X)^2/2}, \quad (7)$$

где $X(T)$ – координата центра масс конденсата, $w(T)$ – характерная ширина волнового пакета, $P(T)$, $R(T)$ – соответствующие импульсы. В начальный момент времени, когда конденсат находится в основном состоянии, параметры волновой функции имеют значения $X = P = R = 0$, $w = 1$. Дальнейшая эволюция этих параметров может быть определена с помощью вариационного принципа. Для этого подставим волновую функцию (7) в плотность лагранжиана

на для уравнения (4) и проинтегрируем по пространственной координате. В результате получим эффективную функцию Лагранжа, из которой следуют вариационные уравнения для X и w

$$\begin{aligned} X_{TT} + X - Q_2 X^3 + Q_1 \cos \tilde{\varphi}(T) &= \frac{3Q_2}{2} X w^2, \\ w_{TT} + w - \frac{1}{w^3} - \frac{3}{2} Q_2 w^3 - \frac{Q_3}{\sqrt{2\pi} w^2} &= 3Q_2 X^2 w. \end{aligned} \quad (8)$$

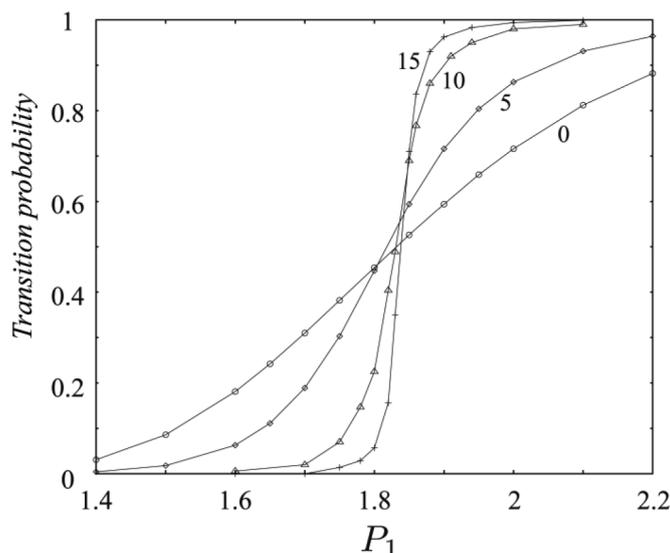
Прочие параметры могут быть найдены из соотношений $P = X_T, R = w_T / w$. Уравнения (8) описывают пару нелинейных осцилляторов, связанных посредством слагаемых в правой части. Согласно уравнению (6) параметр $Q_2 \sim P_2$ является малым в области квазиклассической динамики, поэтому осцилляторы (8) связаны весьма слабо. Однако даже эта слабая связь будет существенно влиять на динамику системы, если между колебаниями координаты центра масс и ширины волнового пакета возможен резонанс. Оценим собственные частоты колебаний этих величин. Уравнение для координаты $X(T)$ центра масс волнового пакета представляет собой возмущенное уравнение Дюффинга. Решение этого уравнения можно представить в виде $X(T) = a(T) \sin \varphi(T)$, причем частота слабонелинейных колебаний этой величины имеет вид [15] $\Omega_X = d\varphi / dT \approx 1 - \frac{3}{4} Q_2 a^2$. Известно, что при медленном переходе ча-

стоты накачки $\omega(T) = d\tilde{\varphi}(T) / dT$ через линейный резонанс в уравнении Дюффинга возможен эффект авторезонанса, при котором происходит непрерывный рост энергии (и амплитуды) колебаний, несмотря на изменение частоты накачки [15]. В терминах параметров P_i необходимое условие существования авторезонанса имеет вид $P_1 \geq 0,82 / \sqrt{P_2}$. В режиме авторезонанса частота колебаний остается близкой к частоте накачки, а амплитуда $a(T)$ медленно меняется со временем. Если авторезонанса в системе нет, то при переходе через линейный резонанс происходит лишь малый скачок амплитуды $\Delta a \sim \sqrt{Q_1}$, известный как рассеяние на резонансе [16]. Чтобы найти собственную частоту колебаний ширины волнового пакета $w(T)$, представим эту величину в виде $w = w_0 + w_1$, где w_0 – медленно меняющееся среднее значение, удовлетворяющее уравнению

$$\begin{aligned} w_{0,TT} + w_0 - \frac{1}{w_0} - \frac{3Q_2}{2} w_0^3 - \\ - \frac{Q_3}{\sqrt{2\pi} w_0^2} &= \frac{3Q_2}{2} a^2(T) w_0, \end{aligned}$$

а w_1 – малое отклонение. Линеаризованное уравнение для w_1 имеет вид

$$\begin{aligned} w_{1,TT} + \Omega_w^2 w_1 &\approx \frac{3}{2} Q_2 a^2 w_0 \cos 2\varphi(T), \quad (9) \\ \Omega_w^2 &= 1 + \frac{3}{w_0^2} - \frac{3Q_2 w_0^2}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Q_3}{w_0^3} - \frac{3}{2} Q_2 a^2. \end{aligned}$$



Зависимость вероятности перехода от величины накачки P_1 для $P_2 = 0,2$ и $P_3 = 0,5; 10; 15$

В случае линейного гармонического осциллятора $Q_2 = Q_3 = 0$ (одна частица в гармонической ловушке) получаем $w_0 = 1$, поэтому собственная частота равна $\Omega_w = 2$. При малых значениях Q_2 и Q_3 будем по-прежнему иметь $\Omega_w \sim 2$. Заметим, что вынуждающая сила в правой части уравнения (9) совершает колебания с частотой $2\Omega_X = 2 - \frac{3Q_2}{2}a^2 \approx 2$, так как мы рассматриваем случай, когда параметр Q_2 мал. Таким образом, при малых значениях Q_2 и Q_3 собственная частота осциллятора (9) и частота вынуждающей силы в его правой части оказываются близкими, что приводит к резонансному усилению колебаний $w(T)$. Иными словами, ширина волнового пакета начинает совершать колебания с быстро растущей амплитудой, что можно интерпретировать как неустойчивость такого волнового пакета, приводящую в исходной системе (4) к распаду решения вида (7). Увеличение нелинейности Q_3 приводит к смещению частоты Ω_w и нарушению резонансного соотношения $\Omega_w \approx 2\Omega_X$, поэтому при большой нелинейности решение (7) оказывается устойчивым. Это означает, что если в уравнении Дюффинга для координаты волнового пакета происходит авторезонанс, то весь волновой пакет как целое совершает колебания, амплитуда которых увеличивается по мере уменьшения частоты накачки. Вероятность захвата в авторезонанс в исходной системе (4) в этом случае близка к единице. Таким образом, с увеличением числа частиц в БЭК, вероятность захвата фазы как функция от амплитуды накачки стремится к ступенчатой функции, характерной для классического маятника Дюффинга (рисунок). Так как Q_3 не входит в первое уравнение (8), положение фронта этой функции не зависит от нелинейности и совпадает с классическим порогом авторезонанса [15]: $P_{1,cr} = 0.82 / \sqrt{P_2}$, что также хорошо видно на рисунке.

Выводы

В данной работе мы показали, что важный эффект сужения функции вероятности перехода при авторезонансной накачке, обусловленный взаимодействием частиц конденсата, определяется нелинейным сдвигом

резонансных частот. Этот сдвиг увеличивается с числом частиц конденсата, обеспечивая устойчивость авторезонансного захвата фазы. В силу этого авторезонанс развивается более эффективно, приводя к резкому сужению области перехода.

Работа выполнена в рамках проекта УрО РАН № 15-8-2-7 «Локализованные структуры, солитоны и их возбуждение в конденсированных средах».

Список литературы

1. Chin C., Grimm R., Julienne P., Tiesinga E.. Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82. P. 1225.
2. Smerzi A., Trombettoni A. Optical Lattices: Theory. In: Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., Carretero-González R. (eds) Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates. Atomic, Optical, and Plasma Physics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. vol 45.
3. Folman R. Material science for quantum computing with atom chips. Quantum Information Processing. 2011. V. 10 P. 995.
4. Векслер В.И. О новом методе ускорения релятивистских частиц // ДАН СССР. 1944. Т. 44. № 9. С. 393.
5. McMillan E.M. The Synchrotron-A Proposed High Energy Particle Accelerator. Physical Review. 1945. V. 68. P. 143.
6. Borich M.A., Friedland L. Driven chirped vorticity holes. Physics of Fluids. 2008. V. 20. № 8. P. 086602.
7. Friedland L., Shagalov A.G. Extreme driven ion acoustic waves. Physics of plasmas. 2017. V. 24. P. 082106.
8. Баталов С.В., Шагалов А.Г. Резонансные эффекты в динамике магнитного солитона // ФММ. 2013. Т. 114. № 2. С. 115.
9. Barak A., Lamhot Y., Friedland L., Segev M. Autoresonant Dynamics of Optical Guided Waves. Phys. Rev. Lett. 2009. V.103. № 12. P.123901.
10. Nicolin A.I., Jensen M.H., Carretero-González R. Mode locking of a driven Bose-Einstein condensate. Physical Review E 2007. V. 75. P. 036208.
11. Bücke R., Berrada T., S. van Frank, Schaff J.-F., Schumm T., Schmiedmayer J., Jäger G., Grond J., Hohenester U. Vibrational state inversion of a Bose-Einstein condensate: optimal control and state tomography. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2013. V. 46, P. 104012.
12. Barth I., Friedland L., Gat O., Shagalov A.G. Quantum versus classical phase-locking transition in a frequency-chirped nonlinear oscillator. Phys. Rev. A. 2011. V. 84 P. 013837.
13. Batalov S.V., Shagalov A.G., Friedland L. Autoresonant excitation of Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. E. 2018. V. 97. P. 032210.
14. Trombettoni A., Smerzi A. Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 2353.
15. Fajans J., Friedland L. Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators. American Journal of Physics. 2001. V. 69. P. 1096.
16. Баталов С.В., Шагалов А.Г. Резонансное управление солитонами спиновых волн // ФММ. 2013. Т. 114. № 10. С. 899.