

УДК 54-16:536.2:692

НОВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ХИМИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Мусабаев Т.Т., Каюпов Т., Сейлханова Д.К.

Евразийский технологический институт ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, e-mail: eti.enu@mail.ru

В статье проанализированы аналитические и численные решения линейных и нелинейных одномерных задач теплопроводности для цилиндрических, сферических и пластинчатых неоднородных тел, включая присутствие химически разнородных материалов, разделяющих различные среды, с учетом полного комплекта граничных условий. Аналитическое решение этих задач сведено к формуле с коэффициентом-указателем типа тел. Рассмотрены известные решения по расчету железобетонных тел и коэффициенты из нормативной литературы. Научная новизна данной работы заключается в учете непрерывной неоднородности коэффициента теплопроводности и внутренних источников тепловыделений. Получены численные решения нестационарных задач теплопроводности. Сравнение численных и аналитических решений тестовых задач доказывает достоверность полученных результатов. Эти решения, при наличии соответствующих коэффициентов, справедливы и для решения задач химических реакций с выделением тепла, влагопереноса, диффузии, коррозии трещинообразования и других задач, описываемых уравнением теплопроводности.

Ключевые слова: аналитическое и численное решение, линейные и нелинейные одномерные задачи, неоднородное тело, уравнение теплопроводности

NEW METHODS FOR CALCULATING NONLINEAR ONE-DIMENSIONAL HEAT CONDUCTIVITY PROBLEMS FOR CHEMICALLY INHOMOGENEOUS BODIES

Musabaev T.T., Kayupov T., Seylkhanova D.K.

Eurasian Technological Institute of the Eurasian National University named after L.N. Gumilev, Astana, e-mail: eti.enu@mail.ru

Analytic and numerical solutions of linear and nonlinear one-dimensional heat conduction problems for cylindrical, spherical and plate inhomogeneous bodies are analyzed in the article, including the presence of chemically dissimilar materials that separate different media, taking into account the complete set of boundary conditions. The analytical solution of these problems is reduced to a formula with a pointer-type index of bodies. Considered solutions for the calculation of reinforced concrete bodies and coefficients from normative literature are considered. The scientific novelty of this work is to take into account the continuous inhomogeneity of the thermal conductivity and internal sources of heat. Numerical solutions of nonstationary heat conduction problems are obtained. Comparison of numerical and analytical solutions of test problems proves the reliability of the results obtained. These solutions, in the presence of appropriate coefficients, are also valid for the solution of problems of chemical reactions with the release of heat, moisture transfer, diffusion, cracking corrosion, and other problems described by the heat equation.

Keywords: analytical and numerical solution, linear and nonlinear one-dimensional problems, inhomogeneous body, heat equation

Расчет теплопроводности непрерывно неоднородных тел является новым направлением в физике твердых тел. В большинстве случаев подобные задачи решаются для слоистых тел классическими методами [1].

При решении одномерных задач для неоднородных тел в цилиндрических и сферических координатах уравнения методы решения и результаты во многом подобны [2]. При решении задачи теплопроводности неоднородных тел, эту закономерность можно распространить и на условно бесконечные пластины, разделяющих разные среды. В данной работе эти задачи объединены путем применения к их решению единого подхода.

Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$r^{-\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r(r) \cdot r^{\eta} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} - q(r), \quad (1)$$

где r – ось направленная перпендикулярно плоскости рассматриваемого тела; η – указа-

тель системы координат: 0 – декартовая; 1 – цилиндрическая; $\eta = 2$ – сферическая; ρ – объемный вес, $\text{кг}/\text{м}^3$; c – удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$; в данной работе в отличие от [3] $q(r)$ зависит от интенсивности внутренних источников тепловыделений, от воздействия химических реакций, от внутреннего трения, от радиационного поля, от прохождения электрического тока и др.; $\lambda_r(r)$ – коэффициент теплопроводности, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$. Для различных тел $\lambda_r(r)$ может возрастать, так и уменьшаться при увеличении температуры. Твердые тела уменьшают коэффициент теплопроводности. Коэффициент теплопроводности газов также зависит и от давления [1].

Во многих случаях ограждающие конструкции бывают конструктивно неоднородными, слоистыми. Например, в жилых застройках часто встречаются пласты: декоративный, ограждающий, теплоизоляционный, облицовочный и т.д. В данной постановке коэффициент теплопроводности имеет непрерывную неоднородность.

Аналитические решения

Пусть $q(r) = q_0 \cdot r^k$, $\lambda_T(r) = \lambda_0 \cdot r^m$.

Рассматривается стационарная задача теплопроводности, т.е. $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{m+\eta} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{q_0}{\lambda_0} r^{\eta+k}. \quad (2)$$

Интегрируя (1) по r , получим

$$T = C_1 \cdot \frac{r^{1-\eta-m}}{1-\eta-m} + C_2 - \frac{q_0 \cdot r^{2-m+k}}{\lambda_0 \cdot (k-m+2) \cdot (\eta+k+1)}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r^{\eta+m}} - \frac{q_0 \cdot r^{1-m+k}}{\lambda_0 \cdot (\eta+k+1)}, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Граничные условия 1 рода.

Заданы законы размещения температуры на поверхности тела:

$$r = a, T = T_a; r = b, T = T_b; \quad (5)$$

Подставляя в (3), получим

$$T_a = C_1 \cdot \frac{a^{1-\eta-m}}{1-\eta-m} + C_2 - \frac{q_0 \cdot a^{2-m+k}}{\lambda_0 \cdot (k-m+2) \cdot (\eta+k+1)};$$

$$T_b = C_1 \cdot \frac{b^{1-\eta-m}}{1-\eta-m} + C_2 - \frac{q_0 \cdot b^{2-m+k}}{\lambda_0 \cdot (k-m+2) \cdot (\eta+k+1)}, \quad (6)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определяются из решений систем уравнений (6):

$$C_1 = \left(T_a - T_b + \frac{q_0 \cdot (a^{2-m+k} - b^{2-m+k})}{\lambda_0 \cdot (k-m+2) \cdot (\eta+k+1)} \right) \cdot \frac{(1-\eta-m)}{a^{1-\eta-m} - b^{1-\eta-m}};$$

$$C_2 = -C_1 \cdot \frac{a^{1-\eta-m}}{1-\eta-m} - T_a + \frac{q_0 \cdot a^{2-m+k}}{\lambda_0 \cdot (k-m+2) \cdot (\eta+k+1)}. \quad (7)$$

Граничные условия 2 рода.

Заданы законы распределения интенсивности теплового потока g на границах:

$$r = a, -\lambda_0 \cdot a^m \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = g_a; r = b, \lambda_0 \cdot b^m \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = g_b; \quad (8)$$

Подставляя в (4), получим

$$-\lambda_0 \cdot C_1 \cdot a^{-\eta} + \frac{q_0 \cdot a^{1+k}}{\eta+k+1} = g_a; \lambda_0 \cdot C_1 \cdot b^{-\eta} - \frac{q_0 \cdot b^{1+k}}{\eta+k+1} = g_b. \quad (9)$$

Граничные условия 3 рода.

Заданы законы конвективного теплообмена среды с поверхностью тела. Применяются в задачах при обтекании поверхности тела жидкостью или газом [1]:

$$-\lambda_0 \cdot a^m \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \beta_a \cdot (T - T_{cp}^a); \lambda_0 \cdot b^m \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \beta_b \cdot (T - T_{cp}^b). \quad (10)$$

Здесь β_a, β_b – коэффициенты теплоотдачи внутренних и внешних поверхностей;

T_{cp}^a, T_{cp}^b – температура окружающей среды вблизи внутренних и внешних поверхностей.

Знак минус ставится, когда направление внешней нормали, рассматриваемой поверхности и оси r не совпадают.

Преобразуем граничные условия (9) в виде

$$T + \frac{\lambda_0 \cdot a^m}{\beta_a} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = T_{cp}^a; \quad T - \frac{\lambda_0 \cdot b^m}{\beta_b} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = T_{cp}^b, \quad (11)$$

и подставляем в (11) решение (3) и (4), тогда решение уравнения (1) определяется из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \left(\frac{a^{1-\eta-m}}{1-\eta-m} + \frac{\lambda_0 \cdot a^{-\eta}}{\beta_a} \right) + C_2 - \frac{q_0 \cdot a^{1+k}}{\eta+k+1} \cdot \left(\frac{a^{1-m}}{\lambda_0 \cdot (k-m+2)} + \frac{1}{\beta_a} \right) &= T_{cp}^a; \\ C_1 \cdot \left(\frac{b^{1-\eta-m}}{1-\eta-m} - \frac{\lambda_0 \cdot b^{-\eta}}{\beta_a} \right) + C_2 - \frac{q_0 \cdot b^{1+k}}{\eta+k+1} \cdot \left(\frac{b^{1-m}}{\lambda_0 \cdot (k-m+2)} + \frac{1}{\beta_a} \right) &= T_{cp}^b. \end{aligned} \quad (12)$$

При надобности, для описания различных сложных теплофизических процессов, можно составлять произвольные комбинации сумм граничных условий (5), (8) и (11). Из полученных систем уравнений определяются коэффициенты C_1 и C_2 .

Граничные условия 4 рода.

Применяются в конструкциях, состоящих из различных слоев. В контакте любых двух слоев тел температура и интенсивность тепловых потоков равны:

$$T_{w1} = T_{w2}; \quad \lambda_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w1} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w2}, \quad (13)$$

где $w1$ и $w2$ – условные обозначения контактируемых двух тел. В данной постановке граничные условия четвертого рода не рассматриваются из-за непрерывной неоднородности рассматриваемого тела.

Полученные решения (12) имеют особые случаи при: $m = 1 - \eta$, $m = k + 2$ и $k + \eta = -1$.

Рассмотрим $m = 1 - \eta$: $\eta = 0$, $m = 1$, $\eta = 1$, $m = 0$ и $\eta = 2$, $m = -1$.

При $\eta = 0$, $m = 1$ уравнение (2) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{q_0}{\lambda_0} r^{k+\eta}. \quad (14)$$

Интеграл уравнения (14) для всех случаев $m = 1 - \eta$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{q_0}{\lambda_0} \frac{r^{k+\eta}}{(k+\eta+1)} + \frac{C_1}{r}; \\ T &= \frac{q_0}{\lambda_0} \frac{r^{k+\eta+1}}{(k+\eta+1)^2} + C_1 \ln r + C_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

При $k + \eta = -1$ имеются следующие альтернативы:

$\eta = 0$, $k = -1$, $m = 1$, $\eta = 1$, $k = -2$, $m = 0$,
 $\eta = 2$, $k = -3$, $m = -1$.

$$I(T) = \int_V \left\{ \lambda_T \cdot (T')^2 - 2 \cdot q_0 \cdot T - \frac{\rho \cdot c}{\tau} \cdot (T^2 - 2 \cdot T' \cdot T) \right\} \cdot r^n \cdot dr - \oint_S \beta_\alpha \cdot (T^2 - 2 \cdot T_{cp}^\alpha \cdot T) \cdot r^n. \quad (18)$$

Для всех случаев $k + \eta = -1$ уравнение (14) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{q_0}{\lambda_0} r^{-1}. \quad (16)$$

Интеграл уравнения (14) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{q_0}{\lambda_0} \frac{\ln r}{r} + \frac{C_1}{r};$$

$$T = \frac{q_0}{\lambda_0} \frac{\ln^2 r}{2} + C_1 \ln r + C_2, \quad (17)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Рассмотрим $m = k + 2$. Количество таких вариантов может быть большим. Но частные случаи, когда тело однородное при $m = 0$, $k = -2$ и $k = 0$, $m = 2$ соответствует случаю (16) и решению (17). При других значениях m и k соответствует случаю (14) и решению (15).

На рис. 1 представлена эпюра распределения температуры в сечении цилиндрического железобетонного радиационно-теплового экрана АЭС. Экран устанавливается для корпуса реактора и предназначен для снижения радиационных и тепловых воздействий, генерирующихся при работе атомного реактора, на находящиеся за ним строительные конструкции биологической защиты. Задача решена при различных вариантах неоднородности железобетона и значений внутренних источников тепла, обусловленных воздействием потока нейтронов при $k = 0$, $q_0 = \pm 1000$ Вт/м³ и следующих исходных данных: $a = 1$ м, $b = 2$ м, $T = -40$ °С, $T_b = 20$ °С, $\beta_a = \beta_b = 35$ Вт/(м² °С). Граничные условия 3 рода.

Для решения сформулированной краевой задачи (1) вариационно-разностным методом. Тогда эквивалентный функционал метода Ритца [4] имеет вид

Система алгебраических уравнений решена методом прогонки [5].

В табл. 1 показаны результаты численного и аналитического решений стационарной задачи при граничных условиях 3 рода в неоднородном теле ($m = -1$) при наличии внутренних источников тепловыделений при $k = 0$, $q_0 = 1000 \text{ Вт/м}^3$ [2], $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $T_a = -40^\circ\text{C}$, $T_b = 20^\circ\text{C}$, $\beta_a = \beta_b = 35 \text{ Вт/(м}^2\text{ }^\circ\text{C)}$ [4].

Результаты численного расчета при разбиении толщины стенки на 10 интервалов

практически совпадают с аналитическим решением (табл. 1). Для оценки зависимости коэффициента теплопроводности от температуры рассмотрена задача при $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $T_a = -40^\circ\text{C}$, $T_b = 20^\circ\text{C}$, $\beta_a = \beta_b = 35 \text{ Вт м}^2\text{ }^\circ\text{C}$. Граничные условия 3 рода. Функция, аппроксимирующая график неоднородности жаростойкого бетона В30 [6] $\lambda(T) = 3 - 0,007 T \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$ [3].

Коэффициенты λ_0 и m , используемые при аналитических решениях, определяются из граничных условий:

$$r = a, \lambda_0 a^m = \lambda(T_a) = 3 - 0,007 T_a = 3 - 0,007(-40) = 3,35;$$

$$r = b, \lambda_0 b^m = \lambda(T_b) = 3 - 0,007 T_b = 3 - 0,007(20) = 2,86.$$

Откуда

$$\lambda_0 = \lambda(T_a) / a^m, m = \ln(\lambda(T_b) / \lambda(T_a)) / \ln(b / a), \lambda_0 = 3,35, m = -0,228145949.$$

При необходимости аналогично можно получить формулу для определения k :

$$q_0 = q(a) / a^k, k = \ln(q(b) / q(a)) / \ln(b / a).$$

Решение получено при разбиении толщины стенки на 10 интервалов.

На рис. 2 показаны эпюры стационарного температурного поля в бетонном неоднородном теле для 3 итерации (табл. 2). Например, решения для шара обозначены как «Шар», «Ш-1» и «Ш-2». Решения в последних шагах практически совпадают.

На рис. 3 изображены эпюры нестационарного теплового поля в бетонном неоднородном теле через час, день и месяц (31 дней). Бетон имеет следующие теплофизические параметры $\lambda_T(T) = 3 - 0,007 T \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, $c = 920 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}$ и связаны с внешней средой ($\beta_a = 35 \text{ Вт/(м}^2\text{ }^\circ\text{C)}$, $\beta_b = 35 \text{ Вт/(м}^2\text{ }^\circ\text{C)}$, $T_b = 20^\circ\text{C}$). В начальный момент времени температура во всем теле равна 20°C , нестационарный процесс начинается, когда на внутренней части температура среды установлена $T_a = -40^\circ\text{C}$. Используются граничные условия третьего рода.

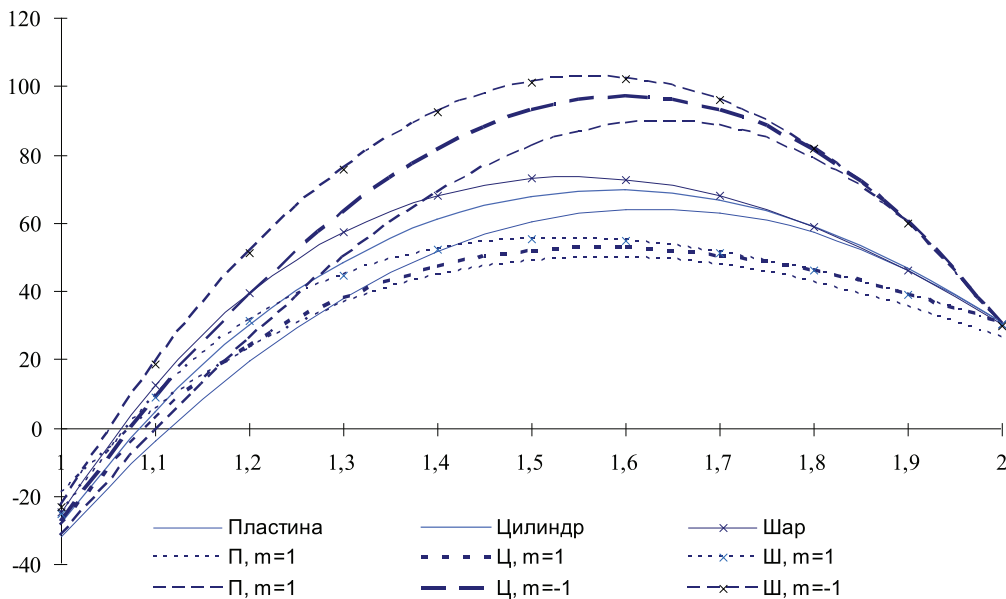


Рис. 1. Распределение температуры в неоднородном теле с внутренним источником тепловыделений $q_0 = 1000 \text{ Вт/м}^3$ при различных вариантах неоднородности: $m = 0$ и $m = \pm 1$

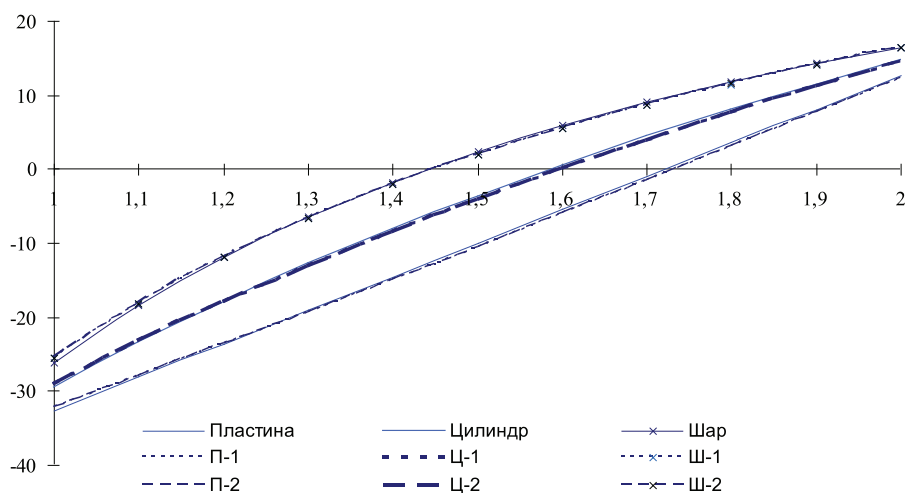


Рис. 2. Решение нелинейной задачи теплопроводности

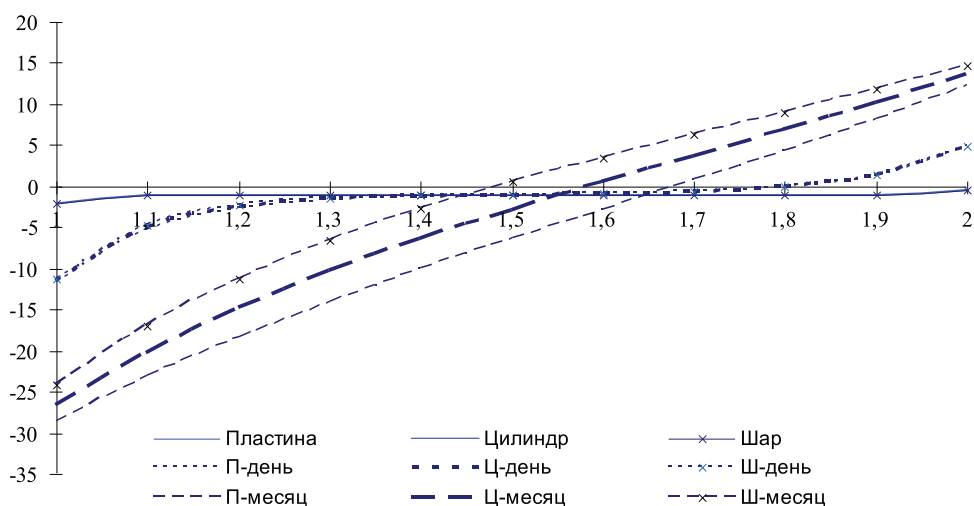


Рис. 3. Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности

Таблица 1

Результаты численного и аналитического решений стационарной задачи при граничных условиях 3 рода

R, м	Пластина	Цилиндр	Шар	Пластина	Цилиндр	Шар	Пластина	Цилиндр	Шар
	аналитика	аналитика	аналитика	численный	численный	численный	разница	разница	разница
1	-22,07	-18,11	-13,76	-22,08	-18,15	-13,83	0,01%	0,04%	0,07%
1,1	7,47	16,75	26,5	7,42	16,72	26,41	0,05%	0,03%	0,09%
1,2	34,23	46,25	58,12	34,15	46,22	58,02	0,08%	0,03%	0,09%
1,3	57,21	69,89	81,58	57,11	69,86	81,47	0,09%	0,03%	0,10%
1,4	75,45	87,19	97,19	75,35	87,17	97,09	0,09%	0,02%	0,09%
1,5	87,97	97,65	105,12	87,87	97,64	105,03	0,09%	0,01%	0,09%
1,6	93,8	100,81	105,45	93,71	100,8	105,38	0,09%	0,01%	0,07%
1,7	91,95	96,15	98,19	91,88	96,15	98,14	0,07%	0,00%	0,05%
1,8	81,46	83,21	83,28	81,42	83,21	83,25	0,04%	0,00%	0,03%
1,9	61,35	61,48	60,63	61,33	61,49	60,63	0,02%	0,01%	0,00%
2	30,64	30,48	30,11	30,65	30,5	30,14	0,01%	0,02%	0,03%

Таблица 2

Эпюры температуры для 3 итерации

R, м	Пластина	Цилиндр	Шар	П-1	Ц-1	Ш-1	П-2	Ц-2	Ш-2
1	-32,61	-29,55	-26,05	-32,21	-29,05	-25,47	-32,21	-29,04	-25,47
1,1	-28,09	-23,45	-18,32	-27,97	-23,31	-18,17	-27,96	-23,3	-18,16
1,2	-23,57	-17,89	-11,88	-23,69	-18,01	-11,99	-23,67	-18	-11,98
1,3	-19,04	-12,77	-6,42	-19,36	-13,07	-6,69	-19,35	-13,06	-6,68
1,4	-14,52	-8,04	-1,75	-14,99	-8,45	-2,08	-14,98	-8,44	-2,08
1,5	-10	-3,62	2,31	-10,57	-4,1	1,95	-10,56	-4,09	1,95
1,6	-5,48	0,5	5,86	-6,11	0,01	5,5	-6,1	0,01	5,51
1,7	-0,96	4,38	8,99	-1,6	3,9	8,67	-1,6	3,9	8,67
1,8	3,57	8,03	11,78	2,95	7,61	11,5	2,95	7,61	11,51
1,9	8,09	11,49	14,27	7,56	11,14	14,06	7,56	11,14	14,06
2	12,61	14,77	16,51	12,21	14,52	16,37	12,21	14,52	16,37

Толщина стенки при $a = 1$ м, $b = 2$ м разбита на 10 интервалов. Шаг по времени в каждом рассматриваемом периоде разбит на 100 интервалов: первый час разделен на интервал по 36 сек; оставшиеся 23 часа первого дня по 828 сек; оставшиеся 30 дней месяца по 25920 сек.

Как видно из эпюр температурного поля (рис. 3), в начальный момент времени во всех рассматриваемых телах законы распределения температурного поля по сечению близки и количественно, и качественно. С течением времени решения стремятся к решению стационарных задач (рис. 2).

Исходя из проведенных расчетов, можно сделать заключение о значительном влиянии на температурное поле внутреннего тепла разогрева и неоднородности материала.

В данной работе $q(r)$ является переменной величиной, которая позволит решать задачи химических реакций, радиационного поля, электрического тока и др. Эти решения, при наличии соответствующих коэффициентов, справедливы и для решения

задач влагопереноса, диффузии, коррозии и трещинообразования и других задач, описываемых уравнением теплопроводности.

Список литературы

1. Бухмиров В.В. Теоретические основы теплотехники. Основы теплообмена. – Иваново: ГОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», 2009. – 102 с.
2. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография. – М.: Изд-во АСВ. 2002. – С. 288. URL: <http://elibrary.pstu.ru/vufind/Record/RUPSTUbooks56965> (дата обращения: 15.01.2018).
3. Каюпов Т., Сейлханова Д. Решение одномерных задач теплопроводности неоднородных тел // Бетон и железобетон – взгляд в будущее: научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону, Москва, 12–16 мая 2014 года. – С. 166–179.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. 2-е изд., исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
5. Кузнецов Г.В. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
6. Строительные нормы и правила: СНиП 2.03.04-84. Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур. – М., 1984. – 180 с.