

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАТОПЛЕНИЯ ПРИБРЕЖНЫХ РАЙОНОВ НА ОСНОВЕ ГИПЕРБОЛИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

¹Шишняя А.В., ²Кузнецова И.Ю., ³Сухинов А.И.

¹ООО «CVisionLab», Таганрог, e-mail: shishnya.alexander@yandex.ru;

²Институт компьютерных технологий и информационной безопасности

Южного федерального университета, Таганрог, e-mail: ikuznecova@sfsedu.ru;

³Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, e-mail: sukhinov@gmail.com

В статье рассматривается построение, исследование и программная реализация математической модели гидродинамики со свободной поверхностью и изменяемой геометрией береговой линии на основе гиперболизированных уравнений Навье – Стокса. Выполнен асимптотический анализ времени работы алгоритма моделирования гидродинамики на основе гиперболизированных уравнений и сравнение со временем работы алгоритма моделирования на основе классических уравнений (уравнений параболического типа) гидродинамики на основе неявных схем. Основываясь на этом анализе, получена оценка числа узлов, при котором гиперболизированная модель вычислительно более эффективна по сравнению с классической моделью. Выполнена параллельная реализация алгоритма расчета гиперболизированной модели гидродинамики, проведены численные эксперименты и получены значения ускорения и эффективности параллельного алгоритма. Показано, что за счет регулярной структуры хранения данных в памяти и малого числа условных переходов параллельный алгоритм достигает суперлинейного ускорения. В качестве тестового эксперимента для проверки корректности модели выполнено численное моделирование штормового нагона в Таганрогском заливе, произошедшего 24–25 сентября 2014 года. Полученная в результате моделирования зависимость уровня воды вблизи Таганрогского полуострова соответствует реально измеренным значениям.

Ключевые слова: гидродинамика, мелководный водоем, параллельное программирование

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR SURGE PHENOMENA FORECASTING USING HYPERBOLIZED HYDRODYNAMICS EQUATION

¹Shishnya A.V., ²Kuznetsova I.Yu., ³Sukhinov A.I.

¹CVisionLab LLC, Taganrog, e-mail: shishnya.alexander@yandex.ru;

²Institute of Computer Technology and Information Security, Southern Federal University,
Taganrog, e-mail: ikuznecova@sfsedu.ru;

³Don State Technical University, Rostov-on-Don, e-mail: sukhinov@gmail.com

In the paper we describe designing, investigation and implementation on the mathematical model for the free-surface hydrodynamics modelling with variable coastal line based on hyperbolized Navier-Stokes equations. We perform asymptotic analysis of the working time for the model based on hyperbolized equations and compare it to the classical modelling of the hydrodynamics based on implicit stencil. Based on this analysis we give an estimate for the number of nodes for which hyperbolized model become more computationally effective. We perform program implementation of computing of the hyperbolized model, perform numerical experiments and measure speed-up and efficiency of the parallel algorithm. Parallel algorithm reaches superlinear speed-up due to the usage of regular data structures and avoiding conditions. As a test experiment we perform numerical modelling of the surge phenomena took place September 24-25, 2014 at the Taganrog Bay. The numerical curve of the water level obtained during the numerical experiment coincide with the really measured one with high accuracy.

Keywords: hydrodynamics, shallow water, parallel programming

Влияние, оказываемое человеком на водные ресурсы, подвергает экосистему водоема значительным изменениям, например, меняется температурный режим водоема, режим уровня воды, гидрохимический режим и др. В связи с этим необходим мониторинг состояния водных объектов, а также прогнозирование возможных чрезвычайных ситуаций, связанных с заморными явлениями, поднятием уровня воды и затоплением прибрежных районов, что позволит спасти человеческие жизни и сократить наносимый материальный ущерб.

При моделировании процессов, происходящих в мелководных водоемах, классическими являются модели, основанные на уравнениях Навье – Стокса (уравнениях параболического типа) [1]. Аппроксимация такой модели с помощью неявных схем обладала недостаточным запасом устойчивости и налагает обременительные ограничения на шаг по времени как в случае явной схемы. В ряде работ [2–4] удалось ослабить это ограничение за счет гиперболизации уравнений модели. Кроме того, в случае большого числа узлов расчетной сетки такая гиперболизированная явная схема ока-

зывается вычислительно более выгодной при параллельной программной реализации благодаря сокращению количества передач данных при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Формулировка непрерывной модели

В работе [5] была рассмотрена модель гидродинамики мелководных водоемов с уточненными граничными условиями. Недостатком описанной модели, в основе которой лежат уравнения параболического типа, является то, что в отличие от реально протекающего процесса, модель не способна описывать распространение значений физических величин (таких как скорость движения среды, давление и др.) с конечной скоростью. Данный недостаток отсутствует в уравнениях гиперболического типа, при

этом формируется фронт волны, скорость движения которого зависит от коэффициента при второй производной по времени, а сама вторая производная принимается в качестве регуляризирующего слагаемого, сглаживающего решение и позволяющего ослабить ограничения на шаг по времени [6].

Распространение возмущений в водоеме возможно благодаря сжимаемости жидкости (зависимость плотности от давления), поэтому полагаем

$$P = P_0 + \beta(\rho - \rho_0), \quad (1)$$

где β – коэффициент сжимаемости жидкости (для воды $\beta = 2,13 \cdot 10^6 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}$).

С учетом (1) система гиперболизированных уравнений движения имеет вид

$$\tau \cdot (\rho \mathbf{v})''_{t^2} + (\rho \mathbf{v})'_t + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\text{grad}P + \text{div}(\eta \text{grad} \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\tau \cdot \rho''_{t^2} + \rho'_t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3)$$

$$\tau \cdot q''_{t^2} + q'_t + (\text{grad}q)^T \cdot \mathbf{v} = |\text{grad}q| \cdot \omega, \quad (4)$$

где τ – регуляризирующий параметр, определяющий время между взаимодействиями, по порядку равное времени, за которое акустическая волна проходит ячейку расчетной сетки [7]:

$$\tau = \alpha \frac{\|\mathbf{h}\|}{c}, \quad (5)$$

где c – скорость звука в воде, $\alpha \in [0; 1]$ – безразмерный параметр.

Граничное условие для давления на свободной границе для уравнений (2)–(4) имеет вид

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}| \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = & -(\tau \rho q''_{t^2} + \rho q'_t)'_t + (\rho \mathbf{n} \omega)'_t + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'_t - \\ & - \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \text{div}(\eta \text{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Дискретизация

При расщеплении по физическим процессам система (2)–(4) примет вид

$$\tau \cdot \frac{\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n - 2\rho^n \mathbf{v}^n + \rho^{n-1} \mathbf{v}^{n-1}}{h_t^2} + \frac{\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n - \rho^{n-1} \mathbf{v}^{n-1}}{2h_t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}^{n+\sigma} \cdot \mathbf{v}^n) = \text{div}(\eta \text{grad} \mathbf{v}^{n+\sigma}) + \rho \mathbf{f},$$

$$\tau \cdot \rho^n_{tt} + \rho^n_t = h_t \cdot \beta \cdot \text{div}(\text{grad} \rho^n) - \text{div}(\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n),$$

$$\tau \cdot \frac{\rho^{n+1} \mathbf{v}^{n+1} - \rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n}{h_t^2} + \frac{\rho^{n+1} \mathbf{v}^{n+1} - \rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n}{2h_t} = -\text{grad}P^n.$$

Граничное условие (6) примет вид

$$|\mathbf{n}| \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = \left(\frac{\tau}{h_t^2} + \frac{1}{2h_t} \right) (\rho^n(\tilde{\mathbf{v}}^n, \mathbf{n}) - \rho^{n+1} q^n_t - \tau \rho^{n+1} q^n_{tt}).$$

Аппроксимация по пространственным направлениям выполнена с помощью интегро-интерполяционного метода с частичной заполненностью [6]. Условия устойчивости полученной разностной схемы:

$$\tau \leq h_t, \quad h_t \leq \frac{\|\mathbf{h}\|}{\sqrt{2\beta}}, \quad \|\mathbf{v}\| \leq \sqrt{2\beta},$$

$$h_t \leq \min\left(\frac{\rho h_x}{2\mu}, \frac{\rho h_y}{2\mu}, \frac{\rho h_z}{2\eta}\right), \quad h_x \leq \frac{2\mu}{\rho|u|},$$

$$h_y \leq \frac{2\mu}{\rho|v|}, \quad h_z \leq \frac{2\mu}{\rho|w|}.$$

Оценим величину шага по времени, допустимого при решении практических задач. Примем $\|\mathbf{h}\| = 1000$ м, $\beta = 2,13 \cdot 10^6 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}$, тогда $h_t \leq 0,48c$.

Аналитическое сравнение вычислительной сложности алгоритмов

Выполним оценку количества полных проходов по узлам расчетной сетки, необходимого для получения решения в конкретный момент времени для алгоритмов на основе классических уравнений Навье – Стокса и системы гиперболизированных уравнений гидродинамики. Пусть размер сетки $N_1 \times N_2 \times N_3$, размер расчетной области $l_1 \times l_2 \times l_3$, u, v, w – три компоненты поля скорости.

Предположим, что решение необходимо получить в момент времени

$$T = \min\left(\frac{h_x}{|u|}, \frac{h_y}{|v|}, \frac{h_z}{|w|}\right). \quad \text{В случае неявной}$$

схемы это означает, что нужно выполнить только один шаг по времени и решить уравнения типа диффузии-конвекции-реакции. При использовании попеременно-треугольного метода (ПТМ) количество внутренних шагов по времени асимптотически пропорционально максимальному числу узлов сетки по одному из направлений [8]. Учтем также, что в нашем случае эта константа пропорциональна отношению шага расчетной сетки по горизонтальному направлению к шагу по вертикальному направлению. Таким образом, количество шагов ПТМ совместно с методами сопряженных и бисопряженных направлений асимптотически равно [9] $O\left(\frac{l_x N_z}{\sqrt{N_x l_z}}\right)$.

При численном решении задач гидродинамики мелководных водоемов на основе трехмерной системы уравнений

Навье – Стокса ограничение на шаг по времени определяется вертикальными составляющими скорости и шага по пространству. В случае применения модели на основе гиперболизированной системы уравнений гидродинамики, количество шагов по времени, требуемых для получения решения в момент времени T асимптотически равно $O\left(\frac{\sqrt{2\beta}}{|w|}\right)$.

Из всего вышесказанного можно заключить, что применение модели на основе системы гиперболизированных уравнений более предпочтительно при выполнении условия

$$\frac{l_x N_z}{\sqrt{N_x l_z}} > \frac{\sqrt{2\beta}}{|w|}. \quad (7)$$

где $\sqrt{\beta} = c$ – скорость звука в воде.

В случае Азовского моря $l_x = 380000$ м, $l_z = 17$ м, характерная вертикальная скорость $w = 0,01$ м, тогда модель на основе гиперболизированных уравнений вычислительно более эффективна по сравнению с моделью на основе уравнений Навье – Стокса параболического типа при $\frac{N_z}{\sqrt{N_x}} > 9,23$. Такое

соотношение количества узлов расчетной сетки вполне достижимо, то есть оба метода обладают примерно одинаковой применимостью. Далее будет показано, что на практике параллельная реализация метода на основе гиперболизированных уравнений позволяет получить значительно более эффективный алгоритм расчета модели.

Численные эксперименты

Проверку адекватности построенной модели на основе гиперболизированных уравнений реально протекающему физическому процессу, а также сравнение прогнозируемых гидродинамических параметров и быстродействие разработанных алгоритмов прогнозирования на основе классических (параболических) и гиперболизированных уравнений Навье – Стокса выполним на основе данных о затоплении прибрежных регионов Азовского моря из-за штормового нагона, которое произошло 24–25 сентября 2014 г. в районе порта г. Таганрога. Скорость и направление ветра приведены в таблице [9].

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1. В качестве начального приближения использовались результаты расчета течений в Азовском море в условиях отсутствия ветра. При численном моделировании нагонных явлений предпо-

лагалось, что возрастание скорости ветра 24 сентября 2014 г. от 0 м/с до 17 м/с (первый столбец таблицы) происходило линейным образом в течение 5 часов. Из графиков на рис. 1 видно, что результаты расчетов на грубой сетке достаточно точно повторяют результаты, полученные на подробной сетке, а значения функции возвышения уровня располагаются достаточно близко по отношению к наблюдаемым значениям.

Также выполнена программная реализация математической модели гидродинамики и сгонно-нагонных явлений в мелководных водоемах на основе регуляризованных уравнений Навье – Стокса на параллельной

вычислительной системе с общей памятью с помощью библиотеки OpenMP [9]. Зависимость ускорения от количества процессоров представлена на рис. 2, а эффективности – на рис. 3.

По полученным результатам (рис. 3) видно, что эффективность параллельной программы больше единицы, то есть программа показывает суперлинейное ускорение из-за независимости вычислений в рамках итерации по времени, при этом барьерная синхронизация – единственный дополнительный расход. Высокая эффективность параллельной реализации достигается благодаря следующим особенностям алгоритма:

Данные о скорости, направлении ветра и уровне воды в районе порта г. Таганрога, 24–25 сентября 2014 г.

Момент времени	24 сентября 2014						25 сентября 2014		
	00:00	04:00	08:00	12:00	16:00	20:00	00:00	04:00	08:00
Направление ветра	Ю-В	Ю-В	Ю	Ю-Ю-З	Ю-Ю-З	З	Ю-З	Ю-З	Ю-З
Скорость ветра, м/с	17	18	27	33	37	33	28	22	18
Уровень воды, см	12	24	66	160	380	420	390	320	280

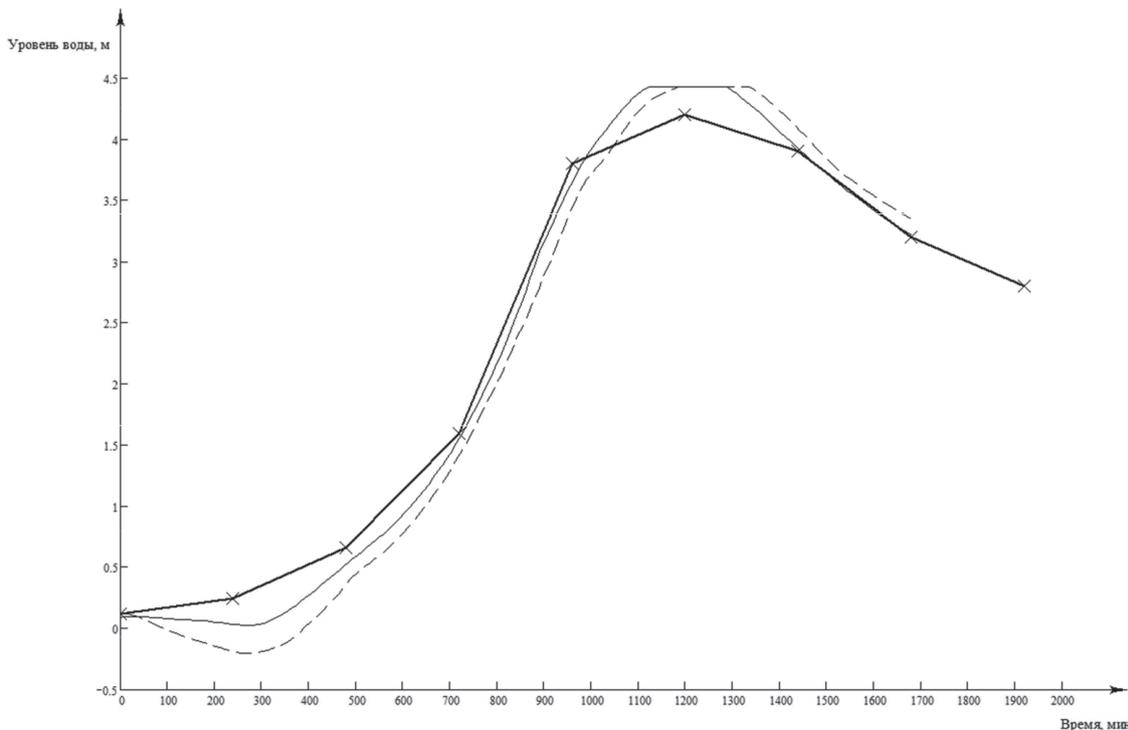


Рис. 1. Функция возвышения уровня в районе порта г. Таганрога (пунктирная линия – значения, рассчитанные на сетке с шагами по горизонтальным направлениям – 1003 м и 1013 м, тонкая линия – значения, рассчитанные на сетке с шагами по горизонтальным направлениям – 503 м и 510 м; шаг сетки по вертикальному направлению – 0,1 м; ломаная линия – натурные данные)

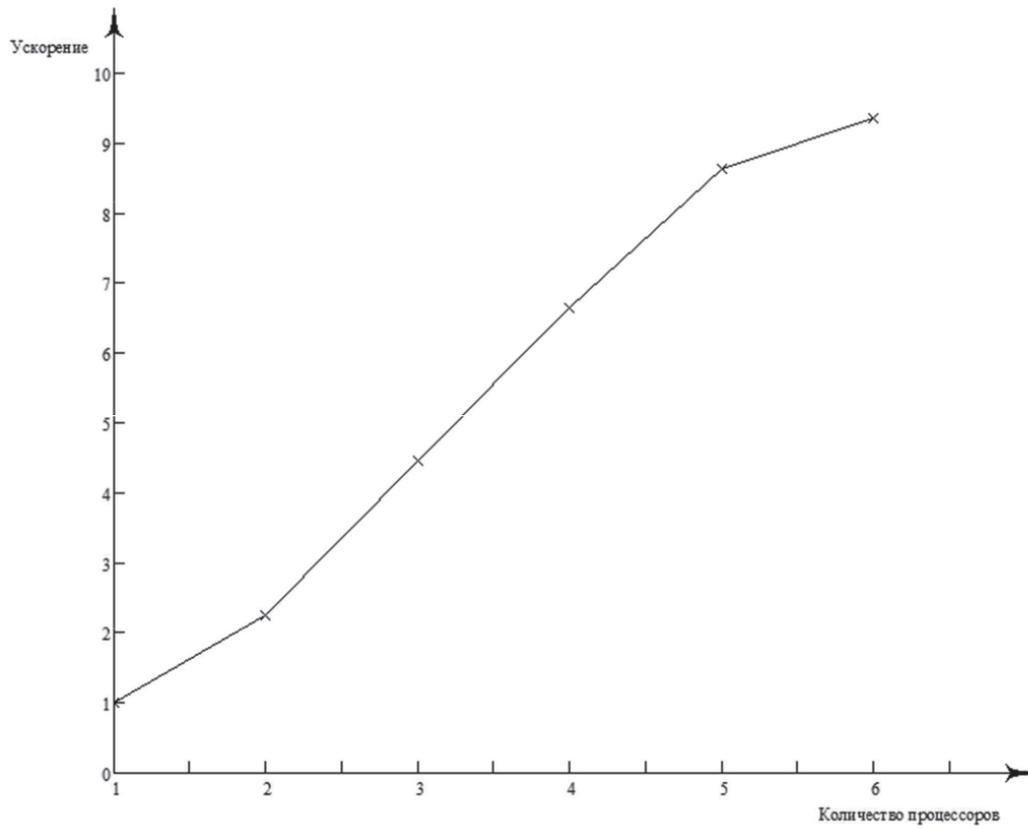


Рис. 2. Ускорение параллельной программы

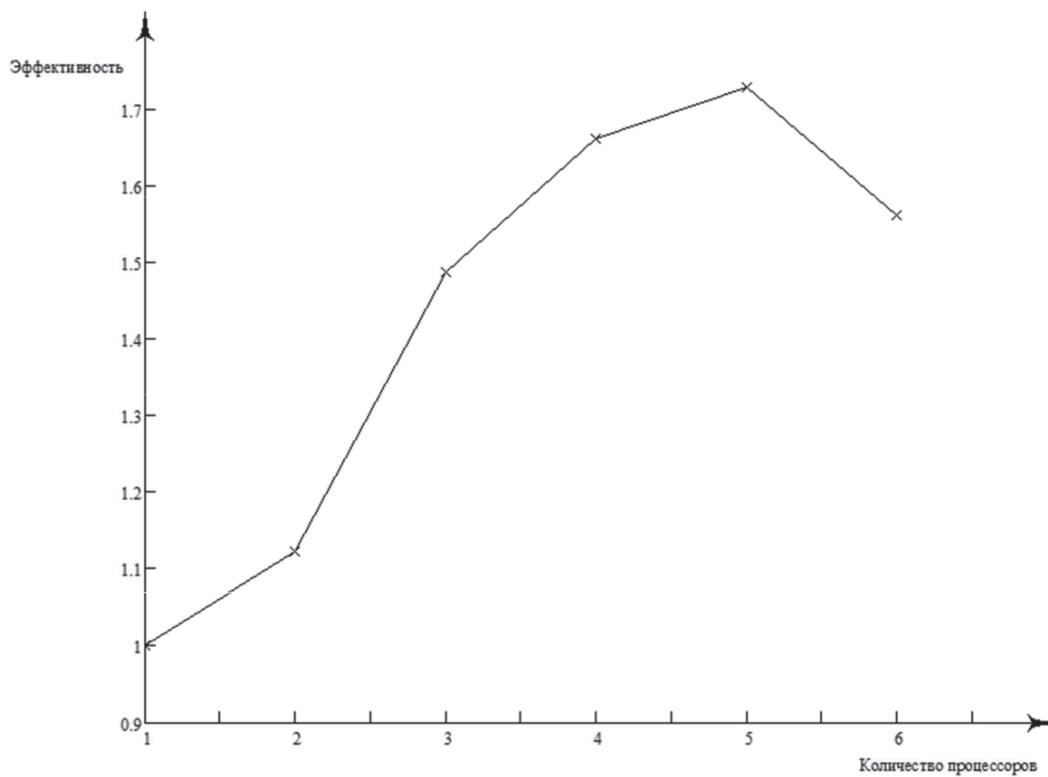


Рис. 3. Эффективность параллельной программы

1. Явная схема расчета позволяет значительно сократить число синхронизаций параллельных потоков;

2. Использование нового метода для моделирования свободной поверхности позволяет избежать дополнительных временных расходов на перестройку расчетной сетки области.

3. Применение интегро-интерполяционного метода с частичной заполненностью позволило использовать структурированные регулярные сетки и регулярные структуры данных для их хранения, что повышает эффективность работы КЭШ-памяти процессора.

Выводы

В работе рассмотрена математическая модель гидродинамики со свободной поверхностью и изменяемой геометрией береговой линии на основе гиперболизированных уравнений Навье – Стокса. Введение регуляризирующего параметра τ позволяет увеличить шаг по времени при численном решении уравнений с помощью явных схем и повысить эффективность параллельной программной реализации алгоритма по сравнению с моделью на основе классических уравнений (уравнений параболического типа) Навье – Стокса.

Проведено аналитическое сравнение вычислительной сложности алгоритмов на основе классических уравнений Навье – Стокса и системы гиперболизированных уравнений. Показано, что при выполнении условия (7) гиперболизированная модель гидродинамики вычислительно предпочтительнее классической модели на основе уравнений Навье – Стокса параболического типа. Другими словами, классическая модель предпочтительнее при малой скорости течений и грубой расчетной сетке, а при увеличении количества узлов сетки (при измельчении сетки) или при возрастании

скорости течений лучше использовать регуляризованную модель.

Выполнена программная реализация модели на основе гиперболизированных уравнений гидродинамики на параллельной вычислительной системе с общей памятью с использованием библиотеки OpenMP и приведены графики ускорения и эффективности параллельной программы в зависимости от количества процессоров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту № 15-07-08408.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 733 с.
2. Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Использование явных схем для моделирования процесса двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. – 2011. – № 23 (7). – С. 52–60.
3. Д’Асчензо Н., Савельев В.И., Четверушкин Б.Н. Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – № 55 (8). – С. 1320–1328.
4. Иванова К.Н., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Квазигазодинамическая система уравнений и уравнения Навье – Стокса // Математическое моделирование. – 2004. – № 16 (4). – С. 98–104.
5. Шишня А.В., Сухинов А.И., Кузнецова И.Ю. Моделирование штормового нагона в мелководном водоеме на основе прецизионных 3D моделей гидродинамики // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 12–2. – С. 335–340.
6. Четверушкин Б.Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды // Математическое моделирование. – 2005. – № 17 (4). – С. 27–39.
7. Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной явной схеме для решения задач фильтрации // Математическое моделирование. – 2010. – № 22 (4). – С. 99–109.
8. Сухинов А.И., Шишня А.В. Улучшение оценки параметра γ_1 попеременно-треугольного итерационного метода с априорной информацией // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 7–15.
9. Шишня А.В., Сухинов А.И. Построение регуляризованной математической модели гидродинамики и сгонно-нагонных явлений в мелководных водоемах и её параллельная реализация на параллельной вычислительной системе с общей памятью // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 12 (161). – С. 219–230.