

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ, ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННОЙ И УПРУГО ПОДВЕШЕННОЙ НА ВИНКЛЕРОВОМ ОСНОВАНИИ

Агаларов Дж.Г., Мамедова Г.А.

Институт математики и механики национальной академии наук Азербайджана, Баку, e-mail: gular-gulshan@rambler.ru

На практике часто встречаются пластины, подвешенные различными способами. Явно выраженные решения, как правило, определяются при равновесии пластин. При колебании пластины частота явно аналитически не представляется. В данной работе рассматривается колебание круговых упругих пластин на Винклеровом основании при сложном креплении. По контуру имеет место шарнирное закрепление. В это же время шарнир опирается упруго. Это объясняется тем, что при колебаниях пластины опора поддается, что может иметь место при недостаточной жёсткости опоры. Здесь рассчитывается жёсткость опоры как функция частоты, т.е. решается обратная задача. Решение задачи представляется в виде функций Кельвина или Бесселя. Результаты расчёта представлены в виде графиков. В зависимости от частоты может иметь место решение в виде Бесселевых функций при больших частотах либо в виде функций Кельвина при меньших частотах. Здесь частота колебаний качественно влияет на картину движения. При превышении частотой определенного значения картина движения, определяемая Бесселевыми функциями, принимает форму, определяемую функциями Кельвина. Это связано с превалированием усилий. При определённых соотношениях цилиндрической жёсткости пластины и частоты свободных колебаний имеет место граница качественной картины колебаний: по одну сторону этой границы колебания определяются Бесселевыми функциями, по другую – функциями Кельвина.

Ключевые слова: колебания, частота, радиус, жёсткость, пластины

OSCILLATIONS OF THE PLATE PIVOTALLY FASTENED AND ELASTIC SUSPENDED ON VINKLEROV BASE

Agalarov Dzh.G., Mamedova G.A.

Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, e-mail: gular-gulshan@rambler.ru

In practice the plates suspended in various ways often meet. Obviously expressed decisions as a rule are defined at balance of plates. At fluctuation of a plate frequency obviously analytically isn't represented. In this work fluctuation of circular elastic plates on Vinklerov the basis is considered at difficult by fortified. On a contour fixing takes place pivotally. In the same time the hinge leans is elastic. It is explained by the fact that at fluctuations of a plate the support gives in that can have places at insufficient rigidity of a support. Here the rigidity of a support as function of frequency of t pays off. e the return problem is solved. The solution of a task is presented in the form of functions of Calvin or Bessel. Results of calculation are presented in the form of schedules. Depending on frequency the decision in the form of Bessel functions with big frequencies can take place or in the form of Calvin's functions with smaller frequencies. Here the frequency of fluctuations qualitatively influences a picture of the movement. At excess by the frequency of a certain value to a picture of the movement determined by Bessel functions takes the form determined by Calvin's functions. It is connected with a prevalence of efforts. At certain ratios of cylindrical rigidity of a plate and frequency of free fluctuations the border of a qualitative picture of fluctuations takes place: on one side of this border of fluctuation are defined by Bessel functions, on another – Calvin's functions.

Keywords: oscillations, frequency, radius, stiffness, plates

Круговые пластины широко применяются в различных отраслях техники в качестве рабочих элементов в нефтеперерабатывающей промышленности, авиастроении, в гражданском строительстве и др.

Определению собственных частот колебаний круговых пластин, как свободных так и покоящихся на упругом основании типа Винклера, посвящён ряд работ [1–4]. Только для статических задач об изгибе прямоугольных пластинок, лежащих на упругом основании с переменным коэффициентом постели, известны решения. В статье [5] расчёт таких пластинок ведётся методом

конечных элементов, а в [6] – методом Галёркина.

В данной работе рассматриваются свободные колебания круглой пластины, подвешенной различными способами с Винклеровым основанием. Очевидно, вид подвески будет сказываться на частоте колебаний. На практике опора пластины может оказаться отличной от планируемой, и поэтому необходимо знание, как она влияет на частоту колебаний. В работе [7–10] исследованы симметричные поперечные колебания металлополимерной трехслойной круговой пластины, связанной с упругим

основанием, при тепловом ударе. Для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в легком заполнителе деформированная нормаль прямолинейна и несжимаема по толщине. Получены аналитические решения, проведен их численный анализ.

В работе [11] представлено решение уравнения собственных колебаний лежащей на деформируемом основании трансверсально-изотропной пластины, один край которой жестко закреплен, а три других шарнирно оперты. Задача решается методом декомпозиций, получено частотное уравнение для определения собственных поперечных колебаний пластины.

В работе [12] рассматриваются задачи свободных колебаний круглых пластин при различных вариантах подвески.

При колебаниях пластины на его опоры действуют значительные усилия, в результате в которых они деформируются, и естественно, это влияет на частоту колебания пластины.

Цель работы: исследование колебаний пластины в случае податливости опоры. Выяснить особенности колебаний при наличии основания Винклера, а именно в одном случае решение представляется при помощи функций Бесселя, в другом – при помощи функций Кельвина.

Уравнение колебаний пластины имеет вид [13, с. 678]:

$$\Delta \Delta w + \frac{\kappa}{D} w + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

здесь подставляя $w(r, t) = W(r) \cos \omega t$, тогда получим

$$\Delta \Delta W + \beta^4 W = W, \quad (\Delta \pm \sqrt[4]{\beta^4 - 1}) \cdot W = 0, \quad (1)$$

где $\beta^4 = \frac{q \omega^2}{D}$, β – функции частоты;

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu)^2}$ – цилиндрическая жёсткость пластины, E – модуль упругости материала пластинки; $q = \rho h$ – масса пластины, h – толщина пластинки, ρ – плотность материала; k – сопротивление грунта оседанию, когда оседание, отнесённое к единице поверхности, равно единице; r_0 – радиус пластины, ω – частота колебаний, ν – коэффициент Пуассона, Δ – оператор Лапласа.

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$W = A Z_1 \left(\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right) + B Z_2 \left(\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right), \quad (1)$$

где $\xi = \frac{r}{\ell}$.

$$\text{Если 1) } \beta > 1; \quad W = A J_0 \left(\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right) + B I_0 \left(\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right). \quad (2)$$

$$\text{Если 2) } \beta < 1; \quad W = A \cdot \text{ber} \left(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right) + B \cdot \text{bei} \left(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right). \quad (2)$$

В дальнейшем понадобятся производные $J_0 \left(\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right)$, $I_0 \left(\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right)$ Бесселевых и $\text{ber} \left(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right)$, $\text{bei} \left(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \xi \right)$ Кельвин функций.

Пластина шарнирно закреплена по контуру и упруго опирается (рис. 1).

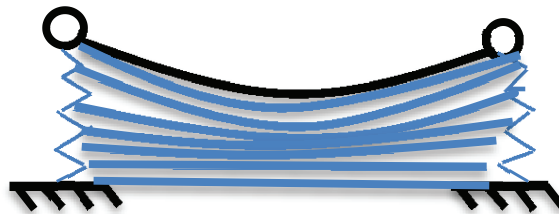


Рис. 1. Пластина шарнирно закреплена по контуру и упруго опирается

Условие шарнирного закрепления имеет вид

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{\nu}{\xi} \cdot \frac{dW}{d\xi} = 0. \quad (3)$$

Условие упругого опирания при $r = \xi$

$$\frac{d^3W}{d\xi^3} + \frac{\nu}{\xi} \frac{d^2W}{d\xi^2} - \frac{\nu}{\xi^2} \frac{dW}{d\xi} = \lambda W, \quad (4)$$

здесь λ – жесткость постели Винклера.

Подставляя (2) в (3) и (4), получаем, учитывая

$$\frac{\partial J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi})}{\partial \xi} = -(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}); \quad \frac{\partial I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi})}{\partial \xi} = -(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi});$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi})}{\partial \xi^2} = \sqrt{\beta^4 - 1} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}} J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) - J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right];$$

$$\frac{\partial^2 I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi})}{\partial \xi^2} = \sqrt{\beta^4 - 1} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}} I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) - I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right];$$

$$\frac{\partial^3 J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi})}{\partial \xi^3} = \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \left(\sqrt{\beta^4 - 1} - \frac{2}{\xi^2} \right) J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + \frac{\sqrt{\beta^4 - 1}}{\xi} J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi});$$

$$\frac{\partial^3 I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi})}{\partial \xi^3} = \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \left(\sqrt{\beta^4 - 1} - \frac{2}{\xi^2} \right) I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + \frac{\sqrt{\beta^4 - 1}}{\xi} I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi});$$

$$A\sqrt{\beta^4 - 1} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}} J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) - J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right] + B\sqrt{\beta^4 - 1} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}} J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) - J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right] - A\frac{\nu}{\xi}\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \cdot J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) - B\frac{\nu}{\xi}\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \cdot I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) = 0, \quad (5)$$

$$A\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \left(\sqrt{\beta^4 - 1} - \frac{2}{\xi^2} \right) J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + B\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \left(\sqrt{\beta^4 - 1} - \frac{2}{\xi^2} \right) I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + A\frac{\sqrt{\beta^4 - 1}}{\xi} J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + B\frac{\sqrt{\beta^4 - 1}}{\xi} I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + \frac{\nu}{\xi}\sqrt{\beta^4 - 1} \left[A \left(\frac{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}}{\xi} J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) - J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right) + B \left(\frac{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}}{\xi} I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) - I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right) \right] - \frac{\nu}{\xi^2}\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \left(AJ_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + BI_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right) = \lambda \left(AJ_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + BI_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right). \quad (6)$$

Получим из (5)

$$A = - \frac{B \cdot \left((1-\nu) \frac{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}}{\xi} I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + \sqrt{\beta^4 - 1} I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right)}{\left((1-\nu) \frac{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}}{\xi} J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) + \sqrt{\beta^4 - 1} J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1\xi}) \right)}. \quad (7)$$

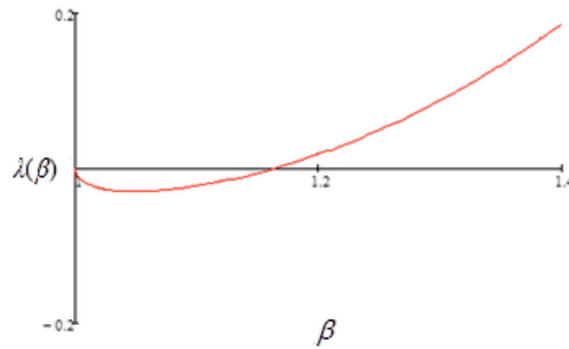


Рис. 2. График I функции жесткости постели Винклера в зависимости от частоты (то есть обратное решение)

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\lambda(\beta) = \frac{\sqrt{\beta^4 - 1} \cdot \left(\frac{(1-\nu)^2}{\xi^2} + \sqrt{\beta^4 - 1} - \frac{2(1-\nu)}{\xi^2} \right) \cdot \left(I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) - J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) \right)}{\frac{(1-\nu)}{\xi} \cdot \left(I_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) J_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) + J_1(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) I_0(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) \right)}. \quad (8)$$

На рис. 2 представлен график функции $\lambda(\beta)$

Если $\beta < 1$; $W = A \cdot ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) + B \cdot bei(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)$.

Подставляя (2') в (3) и (4), получаем, учитывая

$$\frac{\partial ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)}{\partial \xi} = -(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) ber(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi);$$

$$\frac{\partial bei(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)}{\partial \xi} = -(\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) bei(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)$$

$$\frac{\partial^2 ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)}{\partial \xi^2} = \sqrt{\beta^4 - 1} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi} ber(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) - ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) \right];$$

$$\frac{\partial^2 bei(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)}{\partial \xi^2} = \sqrt{\beta^4 - 1} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi} bei(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) - bei(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) \right];$$

$$\frac{\partial^3 ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)}{\partial \xi^3} = \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \left(\sqrt{\beta^4 - 1} - \frac{2}{\xi^2} \right) ber(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) + \frac{\sqrt{\beta^4 - 1}}{\xi} ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi);$$

$$\frac{\partial^3 bei(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi)}{\partial \xi^3} = \sqrt[4]{\beta^4 - 1} \left(\sqrt{\beta^4 - 1} - \frac{2}{\xi^2} \right) bei(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) + \frac{\sqrt{\beta^4 - 1}}{\xi} bei(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi);$$

$$A\sqrt{\beta^4 - 1} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi} ber(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) - ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) \right] + B\sqrt{\beta^4 - 1} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi} ber(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) - ber(0, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) \right] - A\frac{\nu}{\xi}\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \cdot ber(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) - B\frac{\nu}{\xi}\sqrt[4]{\beta^4 - 1} \cdot bei(1, \sqrt[4]{\beta^4 - 1}\xi) = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& A\sqrt{\beta^4-1}\left(\sqrt{\beta^4-1}-\frac{2}{\xi^2}\right)ber\left(1,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)+B\sqrt{\beta^4-1}\left(\sqrt{\beta^4-1}-\frac{2}{\xi^2}\right)bei\left(1,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)+ \\
& +A\frac{\sqrt{\beta^4-1}}{\xi}ber\left(0,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)+B\frac{\sqrt{\beta^4-1}}{\xi}bei\left(0,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)+ \\
& +\frac{\nu}{\xi}\sqrt{\beta^4-1}\left[A\left(\frac{\sqrt[4]{\beta^4-1}}{\xi}ber\left(1,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)-ber\left(0,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)\right)+B\left(\frac{\sqrt[4]{\beta^4-1}}{\xi}bei\left(1,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)-bei\left(0,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)\right)\right]- \\
& -\frac{\nu}{\xi^2}\sqrt{\beta^4-1}\left(Aber\left(1,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)+Bbei\left(1,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)\right)=\lambda\left(Aber\left(0,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)+Bbei\left(0,\sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right)\right). \quad (10)
\end{aligned}$$

Получим из (9)

$$A = -\frac{B \cdot \left((1-\nu) \frac{\sqrt[4]{\beta^4-1}}{\xi} bei\left(1, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) + \sqrt{\beta^4-1} bei\left(0, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \right)}{\left((1-\nu) \frac{\sqrt[4]{\beta^4-1}}{\xi} ber\left(1, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) + \sqrt{\beta^4-1} ber\left(0, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \right)}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), имеем

$$\lambda(\beta) = \frac{\sqrt{\beta^4-1} \cdot \left(\frac{(1-\nu)^2}{\xi^2} + \sqrt{\beta^4-1} - \frac{2(1-\nu)}{\xi^2} \right) \cdot \left(bei\left(1, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \cdot ber\left(0, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) - ber\left(1, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \cdot bei\left(0, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \right)}{\frac{(1-\nu)}{\xi} \cdot \left(bei\left(1, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \cdot ber\left(0, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) + ber\left(1, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \cdot bei\left(0, \sqrt[4]{\beta^4-1}\xi\right) \right)}. \quad (12)$$

На рис. 3 представлен график функции $\lambda(\beta)$.

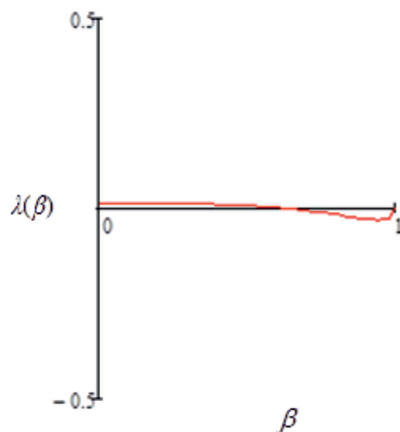


Рис. 3. График II функции жесткости постели Винклера в зависимости от частоты (то есть обратное решение)

Представлены свободные колебания для различных возможных случаев закрепления круглых пластин.

Заключение

Впервые изучается влияние податливости опоры на колебания упругих систем, в частности, на свободные колебания пластины. Притом при наличии упругих оснований выявлено интересное явление:

характер колебаний качественно зависит от соотношения параметров постели Винклера и упругости опоры. Учёт изученных явлений представляет интерес для применения на практике.

Следует учитывать, что постель Винклера ведёт к качественно изменяющемуся состоянию колебаний, характеризующемуся выражению решений различными классами функции, а именно Бесселевыми и функцией Кельвина.

Список литературы

1. Kurktchiev R., Vaisilov I. Vibration of circular plates on elastic foundation with in-plane loading. J. of Theor. and Appl. Mech. Sofia. 1994–95. V. XXV. № 1–2. P. 27–33.
2. Wang Jt. Free vibration of stepped circular plates on elastic foundations. J. of Sound and Vibration. 1992. V. 159. № 1. P. 175–181.
3. Доронин А.М. Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера / А.М. Доронин, В.А. Соболева // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – № 4 (1). – С. 254–258.
4. Крутий Ю.С. Аналитическое решение задачи о свободных колебаниях пластины, лежащей на упругом основании переменной / Ю.С. Крутий, Н.Г. Сурьянинов // Межвузовский сборник «Научные заметки». – 2016. – № 53. – С. 84–92.
5. Witt M. Roz wiazanie ptyty spoczywajacej na podtozu szpezystym o zmiennym wspotczynniku podatnosci metoda elementow skonczonych. Pr. nauk. Inst. inz. Lad. Pwr. 1974. No. 13. P. 143–149.
6. Mofid M., Noroozi M. A plate on Vinkler foundation with variable coefficient // Transaction A: Civil Engineering. 2009. V. 16. № 3. P. 249–255.

7. Колебания круговой металлополимерной пластины, связанной с упругим основанием, при тепловом ударе / Ю.М. Плескачевский [и др.] // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2009. – № 4 (9). – С. 50–54.
8. Леоненко Д.В. Тепловой удар по круглой трехслойной пластине на упругом основании / Д.В. Леоненко, Э.И. Старовойтов // *Изв. РАН. МТТ*. – 2012. – № 1. – С. 141–149.
9. Леоненко Д.В. Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д.В. Леоненко, Э.И. Старовойтов // *Изв. РАН. МТТ*. – 2009. – № 5. – С. 106–119.
10. Старовойтов Э.И. Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, В.Д. Кубенко, Д.В. Тарлаковский // *Изв. вузов. Авиационная техника*. – 2009. – № 2. – С. 16–19.
11. Егорычев О.А. Собственные колебания лежащей на деформируемом основании трансверсально-изотропной пластины, три края которой шарнирно оперты, а четвертый жестко закреплен. Проектирование и конструирование строительных систем. Проблемы механики и строительство / О.А. Егорычев, Р.Н. Степанов, Е.В. Запольнова // *Вестник «МГСУ»*. – 2013. – № 7. – С. 27–33.
12. Jafar H. Agalarov, Guldasta A. Mamedova, Free fluctuations of the plates suspend in the various ways. Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, 2017, 37 (7), pp. 3–10.
13. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.