УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВА В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Муратова Г.К., Нурпейсова А.А.

Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина, Астана,
e-mail: mugk@mail.ru, nauryzbaeva_a@mail.ru

Одной из важных задач гармонического анализа является изучение взаимосвязи интегральных свойств функций и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье (преобразования Фурье). Пространство Лоренца $L_{p\theta}$ является средним интерполяционным пространством L_1 и L_∞, родственной с Лебеговым пространством L_p. Имеют большое применение в дифференциальных уравнениях, в теории рядов Фурье, в теории приближений, в теории функциональных пространств. Статья посвящена исследованию пространства Лоренца в теории тригонометрических рядов Фурье. В данной статье рассмотрена связь между тригонометрическими наилучшими приближениями в пространстве Лоренца в разных метриках и тригонометрических наилучших приближений и суммируемости коэффициентов и преобразования Фурье по общим ортонормированным системам в обобщенных пространствах Лоренца. Также доказаны неравенства в разных метриках между тригонометрическими наилучшими приближениями. Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в различных разделах математики: теории интерполяции функциональных пространств, теории операторов, теоремах вложения функциональных пространств.

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрические коэффициенты Фурье, теория функций, тригонометрическое наилучшее приближение, тригонометрический многочлен

INEQUALITIES IN VARIOUS METRICS BETWEEN TRIGONOMETRIC BEST APPROXIMATIONS IN THE SPACE OF LORENTZ

Muratova G.K., Nurpeysova A.A.

Saken Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Astana, e-mail: mugk@mail.ru, nauryzbaeva_a@mail.ru

One of the important problems of harmonic analysis is the study of the relationship between the integral properties of functions and the properties of the summability of its Fourier coefficients (Fourier transforms). The Lorentz space $L_{p\theta}$ is the mean interpolation space L_1 and L_∞, which is related to the Lebesgue space L_p. They are of great use in differential equations, in the theory of Fourier series, in approximation theory, in the theory of function spaces. The article is devoted to the investigation of the Lorentz space in the theory of trigonometric Fourier series, the same work is devoted to the study of the summability of the coefficients and the Fourier transform on general orthonormal systems in generalized Lorentz spaces. In this paper we consider the connection between trigonometric best approximations in the Lorentz space in different metrics and trigonometric best approximations and summability of the coefficients and the Fourier transform with respect to general orthonormal systems in generalized Lorentz spaces. Also inequalities in various metrics between trigonometric best approximations are proved. The results of the work are of a theoretical nature and it can find application in various branches of mathematics: the theory of interpolation of function spaces, operator theory, embedding theorems for function spaces.

Keywords: Lorentz space, trigonometric Fourier coefficients, function theory, trigonometric best approximation, trigonometric polynomial

Статья посвящена исследованию пространства Лоренца в терминах теории тригонометрических рядов Фурье и тригонометрических наилучших приближений. В данной статье рассмотрена связь между тригонометрическими наилучшими приближениями в пространстве Лоренца в разных метриках. Связь между наилучшими приближениями в пространстве $L_p[0; 2\pi]$ была установлена А.А. Конюшковым, П.Л. Ульяновым и М.Ф. Тиманом [1, с. 86–92].

Эти вопросы также доказаны Е.С. Смаиловым [2, с. 140–151].

Пусть $f(x)$ – измеримая на $[0, 2\pi]$ в смысле Лебега функция, $f^*(x)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(x)|$, $x \in [0, 2\pi]$ [3, с. 104–131]. Пусть $1 \le p \le +\infty$, $1 \le \theta \le +\infty$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству Лоренца $L_{p\theta}$, если

$$\|f\|_{L_{p\theta}} = \left\{ \int_0^{+\infty} \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^\theta \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty.$$

Пусть $T_n(x)$ – тригонометрический многочлен порядка не выше, чем $n \in N$, $f \in L_{p\theta}[0; 2\pi]$, $1 < p < +\infty$, $1 \le \theta \le +\infty$. Наилучшим приближением функции f в пространстве $L_{p\theta}[0; 2\pi]$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше, чем n, назовем величину

$$E_n(f)_{p\theta} = \inf_{\substack{\{T_k\} \\ k \le n}} \|f - T_k\|_{p\theta}.$$

Пусть $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$. Пространства Лоренца $L_{p\theta}$ определяются следующим образом

$$L_{p\theta} = \left\{ f(t) : \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^\theta dt \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \right\}.$$

Если $\theta < \infty$,

$$f_{L_{p\theta}} = \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^\theta dt \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Если $\theta = \infty$,

$$f_{L_{p\theta}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t),$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функций $|f(t)|$.

Пространства Лоренца $L_{p\theta}$ являются более тонкой шкалой пространств, чем шкала пространств Лебега, и имеют большое применение в теории рядов Фурье, в дифференциальных уравнениях, в теории функциональных пространств.

Пусть $1 \le p < \infty$. В случае, когда $p = \theta$, пространства Лоренца $L_{p\theta}$ совпадают с пространствами Лебега L_p [4, с. 4–16].

Основными свойствами пространства Лоренца являются зависимости ее параметров, т.е. имеют место следующие свойства:

1. Если $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta < \theta_1 < \infty$, тогда имеет место вложение

$$L_{p\theta} \hookrightarrow L_{p\theta_1} \left(f_{L_{p\theta_1}} \le c\, f_{L_{p\theta}} \right).$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ иммет место следующее вложение пространств

$$L_{p\theta} \hookrightarrow L_{p+\varepsilon\theta_1}.$$

Далее приведем необходимые вспомогательные предложения.

Лемма 1. Пусть $1 < p < +\infty$, $0 < \theta \le +\infty$, $r \in N$ и $T_n(x)$ – произвольный тригонометрический многочлен. Тогда справедливо следующее неравенство, называемое неравенством Бернштейна:

$$\left\| T_n^{(r)} \right\|_{p\theta} \le 2c_{p\theta} n^r \left\| T_n \right\|_{p\theta},$$

где $\mathrm{const} = c_{p\theta} > 0$ не зависит от T_n.

Лемма 2. Пусть $1 < p < q < +\infty$, $0 < \theta < +\infty$ и $\{P_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ – произвольная последовательность тригонометрических многочленов. Тогда $\forall (n,m) \in N : m < n$ справедливо следующее неравенство:

$$\left\| P_{2^n-1} - P_{2^m-1} \right\|_{q\theta} \le c_{pq\theta} \left\{ \sum_{k=m+1}^{n} 2^{k\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\| P_{2^k} - P_{2^{k-1}} \right\|_{q\theta}^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

где $\mathrm{const} = c_{p\theta} > 0$ не зависит от $\{P_k\}$ и $(n,m) \in N$.

Лемма 3. Пусть $1 \le p < q < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$, $r \in N$ и $f \in L_{p\theta}[0; 2\pi]$.

$\{T_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ – последовательность ее тригонометрических многочленов наилучшего приближения. Тогда $\forall (n,m) \in N : n > m$ справедливо неравенство

$$\left\| T_{2^n}^{(r)}(f) - T_{2^m}^{(r)}(f) \right\|_{q\theta} \le c_{pq\theta r} \left\{ \sum_{k=2^{m-1}}^{2^{n-1}-1} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

где $c_{pqr} > 0$ не зависит от f и n, m.

Применяя методику, предложенную в [5, с. 305–309], доработанную с учетом особенности пространства Лоренца, доказывается следующая вспомогательная теорема, которая сама по себе является важным утверждением. Для тригонометрических рядов также рассмотрено в [6, с. 213–223].

Теорема 1. Пусть $1 < p < q < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$ и

$$T_{2^l-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{2^l-1} a_v cosvx + b_v sinvx, \quad T_{2^k-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{2^k-1} a_v cosvx + b_v sinvx,$$

тогда имеет место следующее неравенство:

$$T_{2^l-1}(x) - T_{2^k-1}(x)_{q\theta} \le c_{p\theta} \left\{ \sum_{n=k+1}^{l} 2^{n\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \sum_{v=2^{n-1}}^{2^n-1} a_v \cos(v;\cdot) + b_v \sin(v;\cdot)_{p\theta}^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2. Пусть $1 \le p < +\infty, 1 \le \theta < +\infty$ и $f \in L_{p\theta}[0;2\pi]$.
Если для некоторого q: $p < q < +\infty$ ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} E_k^{\theta}(f)_{p\theta} < +\infty$$

сходится, то $f \in L_{p\theta}[0;2\pi]$ и справедливы неравенства:

$$f_{p\theta} \le c_{pq\theta}\left\{ f_{p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\},$$

$$E_k^{\theta}(f)_{p\theta} \le c_{pq\theta}\left\{ (n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_n(f)_{p\theta} + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\},$$

где $E_k^{\theta}(f)_{p\theta}$ – наилучшее приближение функций $f \in L_{p\theta}[0; 2\pi]$.

Доказательство. Пусть $f \in L_{p\theta}[0; 2\pi]$. $T_n(x)$ тригонометрический многочлен наилучшего приближения функций f

$$E_n(f)_{p\theta} = \inf_{\substack{\{a_k\},\{b_k\} \\ 0 \le k \le n}} f - T_n(x)_{p\theta}.$$

$E_n(f)_{p\theta} \to 0$, при $n \to +\infty$, $n \in Z^{+}$.

Пусть $f \in L_{p\theta}[0;2\pi]$ $q : p < q < +\infty$.

$$\Delta_k(f;x) = T_{2^k-1}(x) - T_{2^{k-1}-1}(x),$$

где $T_n(x)$ – многочлен наилучшего приближения функций $f \in L_{p\theta}[0; 2\pi]$.
Тогда согласно теореме 1 при $m < n$ имеем

$$\sum_{\nu=m}^{n} \Delta_k(x)_{q\theta} = c_{pq\theta}\left\{\sum_{\nu=m+1}^{n} 2^{\nu\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Delta_k(x)_{p\theta}^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} = c_{pq\theta}\left\{\sum_{\nu=m+1}^{n} 2^{\nu\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} T_{2^k-1}(x) - T_{2^{k-1}-1}(x)_{p\theta}^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le c_{pq\theta}\left\{\sum_{\nu=m+1}^{n} 2^{\nu\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(E_{2^{\nu}-1}(f) - E_{2^{\nu-1}-1}(f)\right)^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \le c_{pq\theta}\left\{\sum_{\nu=m+1}^{n} 2^{\nu\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(E_{2^{\nu-1}-1}(f)\right)^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \quad (1)$$

Так как ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}, \sum_{k=2}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} E_{2^{k-1}-1}^{\theta}(f)_{p\theta}$$

сходятся или расходятся вместе, то в силу условия теоремы правая сторона последнего неравенства стремится к нулю при $(m, n) \to +\infty$.

$$\sum_{\nu=m}^{n} \Delta_k(x)_{q\theta}^{\theta} \to 0, \text{ при } \min(m, n) \to +\infty.$$

Следовательно, последовательность $\left\{T_{2^{\nu}-1}(x)\right\}_{\nu=1}^{+\infty}$ фундаментальна в метрике пространства $L_{p\theta}[0; 2\pi]$. Так как пространство $L_{p\theta}[0; 2\pi]$ полно, то существует $\varphi \in L_{q\theta}[0; 2\pi]$ такая, что

$$\varphi - T_{2^{\nu}-1 q\theta} \to 0, \text{ при } \nu \to +\infty.$$

Следовательно, φ(x) симметрично к $f(x)$ на [0; 2π]. Таким образом, $f \in L_{q\theta}[0; 2\pi]$.
Если же в (1) положим $m = 2$, $n \to +\infty$, тогда

$$f_{q\theta} \le c_{pq\theta}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right)^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} + C''_{pq\theta} f_{p\theta} \le A_{pq\theta}\left\{f_{p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_k(f)_{p\theta}\right)^{\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теперь докажем второе неравенство.

$$f - T_{nq\theta} = C_{pq\theta}\left\{f - T_{n\,p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_k(f - T_n))_{p\theta}\right)^{\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$C_{pq\theta}\left\{f - T_{n\,p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{n} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_k(f - T_n)_{p\theta}\right)^{\theta} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_k(f - T_n)_{p\theta}\right)^{\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \qquad (2)$$

$$k \in [1;n] \cap N : \left(E_k(f - T_n)_{p\theta}\right) = \inf_{\substack{j,k \\ j \le k}} (f - T_n) - t_{j\,p\theta} = E_n(f)_{p\theta}. \qquad (3)$$

Теперь рассмотрим, когда $\forall k > n$:

$$E_k(f - T_n)_{p\theta} = \inf_{\substack{j,k \\ j \le k}} f - (T_n + t_j)_{p\theta} = E_n(f)_{p\theta}. \qquad (4)$$

(3), (4) подставляем в (2):

$$f - T_{nq\theta} \le C_{pq\theta}\left\{f - T_{n\,p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{n} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_n(f)_{p\theta}\right)^{\theta} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_n(f)_{p\theta}\right)^{\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q} > 0\right) \le C''_{pq\theta}\left\{E_n(f)_{p\theta}\left(1 + n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right) + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_k(f)_{p\theta}\right)^{\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Таким образом, мы получили неравенство

$$E_n(f)_{q\theta} \le C''_{pq\theta}\left\{E_n(f)_{p\theta}\left(1 + n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right) + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left(E_k(f)_{p\theta}\right)^{\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \ \forall n > N.$$

Теорема 3. Пусть $1 \le p < q < +\infty$, $1 \le \theta < +\infty$ и $f \in L_{p\theta}[0; 2\pi]$. Если для некоторого $r \in N$ и $q: 1 \le p < q < +\infty$ ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta} < +\infty$$

сходится, то существует производная $f^{(r)} \in L_{q\theta}[0;2\pi]$ и имеют место неравенства

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{q\theta} \le C_{pq\theta r}\left\{\left\|f\right\|_{q\theta} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

$$E_k(f^{(r)})_{q\theta} \le C'_{pq\theta r}\left\{E_n(f)_{p\theta}(1+n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r} + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}} \quad \forall n \in N.$$

Здесь константы $c_{pq\theta r} > 0, c'_{pq\theta r} > 0$ не зависят от f и $n \in N$.

Доказательство. По условию теоремы ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta} < +\infty$$

сходится. Поэтому

$$\sum_{k=2^{m-1}-1}^{2^{n-1}} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta} \to 0$$

при $\min(m,n) \to +\infty$. Тогда, согласно лемме 3, последовательность $\left\{T_{2^n}^{(r)}(x)\right\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна в пространстве $L_{q\theta}[0; 2\pi]$. Поэтому, в силу полноты пространства $L_{q\theta}[0; 2\pi]$, существует

$$\varphi(x,r) \in L_{q\theta}[0;2\pi] : \left\|\varphi - T_{2^n}^{(r)}\right\|_{q\theta} \to 0$$

при $n \to +\infty$ Так как из условий теоремы также следует, что $f \in L_{q\theta}[0;2\pi]$ и

$$\left\|f - T_{2^n}\right\|_{q\theta} \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

то $\varphi(x,r) = f^{(r)}(x)$ – в смысле С.М. Никольского. В лемме 3 положим $m = 1$ и $n \to +\infty$ Тогда

$$\left\|f^{(r)} - T_2^{(r)}\right\|_{q\theta} \le C_{pq\theta r}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{q\theta} \le \left\|f^{(r)} - T_2^{(r)}\right\|_{q\theta} + \left\|T_2^{(r)}\right\|_{q\theta} \le C_{pq\theta r}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} + c_{pq} 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\|T_2^{(r)}\right\|_{p\theta} \le$$

$$\le \text{(лемма 1)} \le c'_{p\theta}\left\|T_2\right\|_{p\theta} + c_{pq\theta r}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Так как

$$\left\|T_2\right\|_{p\theta} \le \left\|f\right\|_{p\theta} + \left\|f - T_2\right\|_{p\theta} = \left\|f\right\|_{p\theta} + E_2(f)_{p\theta} \le \left\|f\right\|_{p\theta} + E_0(f)_{p\theta} \le 2\left\|f\right\|_{p\theta},$$

то

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{q\theta} \le c''_{pq\theta r}\left[\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} E_k^{\theta}(f)_{p\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}} + \left\|f\right\|_{p\theta}\right].$$

Теперь докажем второе неравенство:

$$\left\| f^{(r)} - T_n^{(r)} \right\|_{q\theta} \le C_{pq\theta} \left\{ \left\| f - T_n \right\|_{p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} (E_k(f-T_n)_{p\theta})^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} =$$

$$= C_{pq\theta} \left\{ \left\| f - T_n \right\|_{p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{n} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} (E_k(f-T_n)_{p\theta})^{\theta} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} (E_k(f-T_n)_{p\theta})^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}. \quad (1)$$

$$k \in [1;n] \cap N : E_k(f-T_n)_{p\theta} = \inf_{\substack{\{t_j\} \\ j \le k}} \left\| (f - T_n) - t_j \right\|_{p\theta} = E_n(f)_{p\theta}. \quad (2)$$

Пусть $k > n$:

$$E_k(f-T_n)_{p\theta} = \inf_{\substack{\{t_j\} \\ j \le k}} \left\| (f - T_n) - t_j \right\|_{p\theta} = \inf_{\substack{\{t_j\} \\ j \le k}} \left\| f - (T_n + t_j) \right\|_{p\theta} = E_k(f)_{p\theta}. \quad (3)$$

Далее (2), (3) подставляем в (1):

$$\left\| f^{(r)} - T_n^{(r)} \right\|_{q\theta} \le C_{pq\theta} \left\{ E_n(f)_{p\theta} + E_n(f)_{p\theta} \left[\sum_{k=1}^{n} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} \right]^{\frac{1}{\theta}} + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} (E_k(f)_{p\theta})^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \le$$

$$\le C'_{pq\theta} \left\{ E_n(f)_{p\theta} + E_n(f)_{p\theta} \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r} + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} (E_k(f)_{p\theta})^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \le$$

$$\le C'_{pq\theta} \left\{ E_n(f)_{p\theta} (1 + n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r}) + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r)-1} (E_k(f)_{p\theta})^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + r > 0 \right) \le c''_{pq\theta} \left\{ E_n(f)_{p\theta} (1+n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r} + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} \left(E_n(f)_{p\theta} \right)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}.$$

Таким образом, мы получили неравенство

$$E_n\left(f^{(r)}\right)_{q\theta} \le c''_{pq\theta} \left\{ (1+n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+r} E_n(f)_{p\theta} + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} \left(E_n(f)_{p\theta} \right)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad \forall n \in N.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Иосида К. Функциональный анализ. – 3 изд. – М.: Изд. ЛКИ, 2010. – С. 86–92.

2. Смаилов Е.С., Такуадина А.И. О неулучшаемости предельной теоремы вложения разных метрик в пространствах Лоренца с весом Эрмитта // Уфимск. матем. журн. – 2011. – № 3 (3). – С. 140–151.

3. Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Математический сборник. – 1970. – Т. 81, № 1. – С. 104–131.

4. Гольдман М.Л., Гусельникова О.М. Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Часть 1 // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». – 2011. – № 3. – С. 4–16.

5. Гольдман М.Л. Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса // Доклады РАН. – 2009. – Т. 428, № 3. – С. 305–309.

6. Roginskaya M., Wojciechowski M. Singularity of vector valued measures in terms of Fourier transform // Journ. Fourier Anal. Appl. 2006. Vol. 12. no. 2. P. 213–223.