УДК 511.55

БИКВАДРАТИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ТУННЕЛЕЙ

Байдабеков А.К., Кемельбекова Э.А.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана,
e-mail: a.baydabekov@mail.ru, e.kemlbekova@mail.ru

В настоящее время существует множество способов разработки и создания туннелей в разных отраслях. Совершенствование таких методов построения поверхностей является подземной структурой, в которой она является актуальной задачей в горнодобывающей промышленности. Туннельная поверхность подземных сооружений конструируется двумя способами, такими как закрытый и горный. При закрытом способе работ туннели сооружают одновременно на нескольких участках, что сокращает сроки строительства. На всех участках с поверхности над осью туннеля закладывают ствол шахты и штольней соединяют его со строящимся туннелем. А при горном способе поверхность туннелей разрабатывают буровзрывным методом или механизированным инструментом, после этого немедленно выполняют временное крепление лба и контура выработки, а затем возводят обделку туннеля. В обоих способах необходимо разработать конструкцию поверхности туннелей. Таким образом, поверхность туннеля представляет собой сложную криволинейную поверхность, которая должна отвечать заданным требованиям, а конструкция поверхности туннеля требует значительных затрат времени. В статье представлен новый способ построения поверхности туннеля в соответствии с предопределенными условиями с использованием биквадратичного преобразования плоскости, что позволяет описать конструкцию каждой секции туннеля одним уравнением.

Ключевые слова: преобразования, биквадратичные преобразования, графическая модель, туннель, туннельный разрез, конструирование туннеля, туннельная поверхность

BIQUADRATIC TRANSFORMATIONS AND CONSTRUCTION OF TUNNELS

Baydabekov A.K., Kemelbekova E.A.

L.N. Gumilev Eurasian National University, Astana,
e-mail: a.baydabekov@mail.ru, e.kemlbekova@mail.ru

Currently, there are many ways to design and create a tunnel in different industries. The improvement of such methods for constructing surfaces is an underground structure in which it is an urgent task in the mining industry. The tunnel surface of underground structures is constructed in two ways, such as closed and mountain methods. With the closed method of work, the tunnels are constructed simultaneously at several sites, which reduces the construction time. At all sites from the surface above the axis of the tunnel lay the shaft of the mine and the galleries connect it with the tunnel under construction. And with the mining method, the surface of the tunnels is developed by a drilling and blasting method or a mechanized tool, then a temporary fixation of the forehead and the contour of the mine is immediately performed, and then the tunnel lining is erected. In both methods, it is necessary to design the surface design of the tunnels. Thus, the design of the tunnel surface is a complex curved surface, which must meet the specified requirements, and the tunnel surface design requires a considerable amount of time. The article presents a new method for constructing a tunnel surface in accordance with predetermined conditions using a biquadratic plane transformation, which makes it possible to describe the construction of each tunnel section by one equation.

Keywords: transformation, biquadratic transformations, graphical model, tunnel, tunnel section, tunnel construction, tunnel surface

Известно, что поверхности туннеля являются сложными криволинейными поверхностями, которые должны соответствовать наперед заданным требованиям. Конструирование туннельных поверхностей подземных сооружений осуществляется закрытым и горным способами [1]. Туннельные поверхности при закрытом способе сооружают одновременно на нескольких участках, это дает возможность сокращения сроков строительства [2]. На всех участках с поверхности над осью туннеля закладывают ствол шахты и штольней соединяют его со строящимся туннелем. При горном способе поверхность туннелей разрабатывают буровзрывным методом или механизированным инструментом, после этого немедленно выполняют временное крепление и контура выработки, а затем возводят обделку туннеля [3]. Данные способы требуют разработки конструкции поверхности туннелей. Вследствие чего конструирование поверхности туннеля представляет собой сложную криволинейную поверхность, которая должна отвечать заданным требованиям, а конструкция поверхности туннеля требует значительных затрат времени [4]. В работе предлагается новый способ построения поверхности туннеля в соответствии с предопределенными условиями с использованием биквадратичного преобразования плоскости, что позволяет описать конструкцию каждой секции туннеля одним уравнением [5]. Конструирование и строительство поверхности туннеля требует значительного времени и затрат, поэтому совершенствование методов конструирования поверхностей подземных сооружений является актуальной задачей в шахтостроении [6].

Цель исследования: в результате исследований получить новый метод конструирования поверхности туннеля по наперед заданным условиям с использованием биквадратичного преобразования плоскости, который позволит описать конструирование каждого сечения туннеля одним уравнением.

Материалы и методы исследования

Квадратичные преобразования плоскости исследованы достаточно и нашли применение в прикладной геометрии, а также в науке и технике. Однако исследованию и применению четыре – четырехзначных соответствий и биквадратичных преобразований плоскости исследованы мало.

Сущность предлагаемого метода моделирования биквадратичных преобразований плоскости, порождаемых бинарным отображением двух поверхностей второго порядка, заключается в следующем.

В евклидовом трехмерном пространстве E_3 задаются две поверхности второго порядка Φ_1^0 и Φ_2^0, уравнения которых имеют вид

$$\Phi_1^0\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0, \qquad (1)$$

$$\Phi_2^0\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0, \qquad (2)$$

где x_1, x_2, x_3 – декартовые координаты;

Φ_1^0, Φ_2^0 – непрерывные многочлены второго порядка.

На плоскости Π_1 отметим точку A и через эту точку проведём вертикальный луч s, который пересекает заданные поверхности Φ_1^0 и Φ_2^0 соответственно в точках A_1^0 и A_2^0, A_3^0 и A_4^0. Поверхность второго порядка Φ_1^0 вращаем вокруг оси ординаты так, чтобы положительное направление оси аппликаты совпадало с положительным направлением оси абсциссы.

Другими словами, поверхность второго порядка Φ_1^0 подвергается пространственному преобразованию γ_1 (вращению вокруг оси ординаты под углом 90^0), матрица которого задается уравнением

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Получим новое положение поверхности второго порядка Φ_1^0 и точки A_1^{01}, A_2^{01}, которые соответствуют точкам A_1^0 и A_2^0. Точки A_1^{01} и A_2^{01} проецируем вертикальными лучами на плоскость Π_1, получим точки A_1 и A_2. Вращаем вокруг оси абсциссы вторую поверхность второго порядка Φ_2^0 так, чтобы положительное направление оси аппликаты совпадало с положительным направлением оси ординаты.

Таким образом, поверхность Φ_2^0 подвергаем пространственному преобразованию γ_2, заданному матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

После преобразования получим новое положение поверхности второго порядка Φ_2^0 и точки A_3^{01}, A_4^{01}, которые соответствуют точкам, A_3^0 и A_4^0. Проецируем точки A_3^{01} и A_4^{01} вертикальными лучами на плоскость Π_1, получим точки A_3 и A_4.

Через точки A_1, A_2 и A_3, A_4 проводим прямые, параллельные соответственно осям координат OX_2, OX_1. Получим четырехугольник с вершинами $A_1^/$, $A_2^/$ и $A_3^/$, $A_4^/$.

В результате последовательного выполнения вышеизложенного конструктивного аппарата, каждая точка A плоскости Π_1 преобразуется в четыре точки $A_1^/$, $A_2^/$ и $A_3^/$, $A_4^/$ плоскости $\Pi_1^/$.

Учитывая двухпараметрическое множество точек совмещенной плоскости $\Pi_1^/ \equiv \Pi_1$, получим биквадратичное преобразование плоскости, обозначенное буквой L. Аналогичным образом можно показать, что в обратном направлении каждая точка $A^/$ плоскости $\Pi_1^/$ преобразуется в четыре точки плоскости Π_1. Это преобразование обозначим буквой $L^/$.

С использованием предложенной выше пространственной конструктивной схемы нами получены различные виды канонических биквадратичных преобразований L, $L^/$ плоскости.

Разработанная пространственная конструктивная схема отображения двух поверхностей второго порядка позволила установить новые закономерности получения четыре – четырехзначных соответствий между двумя несовмещенными плоскостями. Разработанный на совмещенной плоскости метод получения биквадратичных преобразований плоскости, порождаемый бинарным отображением двух поверхностей второго порядка. Этот метод позволил получить двенадцать видов канонических биквадратичных преобразований плоскости. Кроме этого, разработанный алгоритм математической модели канонических биквадратичных преобразований плоскости, что необходимо для их практического применения.

В статье предлагается конструирование и новый способ построения поверхности туннеля в соответствии с предопределенными условиями с использованием биквадратичного преобразования плоскости, что позволяет описать конструкцию каждой секции туннеля на одно уравнение.

Для того, чтобы определить способ получения кривых с использованием биквадратичных преобразований, сечение поверхности туннеля может быть задано различными способами. В предлагаемом способе прообраз (кривая n) подвергается геометрическому преобразованию, в результате чего получается образ (искомая кривая $n^/$). При этом прообраз задается уравнением

$$x_2 = kx_1 + m,$$

где k, m – постоянные коэффициенты.

Биквадратичное преобразование L_8 задается уравнениями

$$\begin{cases} x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2' = \sqrt{x_2^2 - x_1^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 - x_2'^2}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1'^2 + x_2'^2}{2}} \end{cases},$$

где $x_1^/$, $x_2^/$ – координаты точек образа; x_1, x_2 – координаты точек прообраза.

Уравнение полученной кривой $n^{/}$ записывается в виде

$$\sqrt{\frac{x_1^{/2}+x_2^{/2}}{2}}=k\sqrt{\frac{x_1^{/2}-x_2^{/2}}{2}}+m,$$

где k, m – постоянные коэффициенты.

Для конструирования поверхности туннеля по заданным параметрам берем несколько точек прообраза n в соответствии, затем каждую из этих точек подвергаем преобразованию. Найдем множество точек, плавно соединив которые получим кривую образ $n^{/}$. При этом форма кривой $n^{/}$ зависит от значений коэффициентов m, k прообраза n.

Поверхность туннеля образуется в результате перемещения плоской кривой четвертого порядка (сечения) по оси направляющей кривой.

Результаты исследования и их обсуждение

Конструирование формы каналовой поверхности туннеля осуществляется, используя графическую модель биквадратичного преобразования следующими задачами:

Исходными данными для решения этой задачи являются осевая линия каналовой поверхности туннеля и законы изменения параметров поперечных сечений a и b. Каждое поперечное сечение $n^{/}$ туннеля является кривой четвёртого порядка, полученной с использованием биквадратичного преобразования. При этом параметры a и b каждого поперечного сечения определяются из формул

$$\begin{aligned} a&=\gamma(l),\\ b&=\gamma(l), \end{aligned} \qquad (5)$$

где l – расстояние от начала туннеля до рассматриваемого поперечного сечения.

Далее используем биквадратичное преобразование, задаваемое уравнением

$$\begin{cases} x_1'=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\\ x_2^1=\sqrt{x_2^2-x_1^2} \end{cases}, \qquad (6)$$

где x_1, x_2 – координаты точки прообраза; $x_1^{/}, x_2^{/}$ – координаты точки образа.

В качестве прообраза принимаем прямую линию общего положения n, уравнение которой имеет вид

$$x_2=kx_1+m, \qquad (7)$$

где k, m – постоянные коэффициенты.

Определяем коэффициенты k, m уравнения (7). Для этого используем свойства биквадратичного преобразования:

а) точка – прообраз B и точка – образ $B_2^{/}$ имеют одинаковую высоту. Точка $B_2^{/}$ является очерковой точкой сечения $n^{/}$. Поэтому точка В прообраза n имеет координаты

$$x_{1_B}=0, \qquad (8)$$

$$x_{2B}=\frac{a}{2}. \qquad (9)$$

б) точка – прообраз С преобразуется в точки – образы $C_1^{/}=C_3^{/}$ и $C_2^{/}=C_4^{/}$, которые лежат на оси Ox_1. Точка $C_1^{/}$ имеет координаты ($b+c$; 0). Точке $C_1^{/}$ соответствует точка C, координаты которой удовлетворяют условию

$$x_{1_C}=x_{2_C}. \qquad (10)$$

Из хода построения точки $C_1^{/}$ можно получить следующее уравнение:

$$(b+c)^2=x_{1_C}^2+x_{2_C}^2, \qquad (11)$$

где $c=a/2$.

Таким образом, при выполнении условия уравнения (10), подставляя значение в уравнение (11), получим

$$(b+c)^2=2x_{1_C}^2 \text{ или } x_{1_C}^2=\frac{(b+c)^2}{2}=x_{2_C}^2. \qquad (12)$$

Через точки B и C проводим прообраз n и, учитывая это, составляем следующую систему уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}=k\cdot 0+m,\\ \dfrac{b+c}{\sqrt{2}}=k\dfrac{b+c}{\sqrt{2}}+m. \end{cases} \qquad (13)$$

В результате решения данной системы уравнения получим значение m и k:

$$m=\frac{a}{2}, \qquad (14)$$

$$k=1-\frac{a(2b+a)}{2\sqrt{2}}. \qquad (15)$$

Для получения искомого сечения туннеля, которое удовлетворяет наперед заданным условиям, подвергаем прообраз n биквадратичному преобразованию. Алгебраическое уравнение этого сечения имеет вид

$$x_1^{/2}+x_2^{/2}(k^2+2)+\left(\frac{m}{k}\right)^2=0. \qquad (16)$$

где k, m – параметры прообраза, описанные уравнениями (14) и (15).

Таким образом, параметрическое уравнение сечения туннеля имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1'=\sqrt{x_1^2+(kx_1+m)^2}\\ x_2'=\sqrt{(kx_1+m)-x_1^2} \end{cases}, \qquad (17)$$

где x_1 – параметры, $\dfrac{(b+c)^2}{2}\le x_1\le\dfrac{c}{\sqrt{2}}$; $m=\dfrac{a}{2}$; $k=1-\dfrac{a(2b+a)}{2\sqrt{2}}$.

Полученное параметрическое уравнение можно применить при конструировании любого требуемого сечения рассматриваемой поверхности туннеля.

Заключение

Конструирование поверхности туннеля представляет собой сложную криволинейную поверхность, которая должна отвечать заданным требованиям, а конструкция поверхности туннеля требует значительных затрат времени. В результате исследований получен новый способ построения поверхности туннеля в соответствии с предопределенными условиями с использованием биквадратичного преобразования плоскости, что позволяет описать конструкцию каждой секции туннеля одним уравнением.

Таким образом, предлагаемый метод конструирования с использованием биквадратичного преобразования позволяет получить различные классы каналовых поверхностей и определить уравнение семейства поперечных сечений рассматриваемой поверхности, что облегчает дальнейшие геометрические расчеты на компьютере.

Список литературы

1. Сорочан Е.А., Трофименков Ю.Г. Основания, фундаменты и подземные сооружения. М.: Книга, 2013. 480 с.

2. Фугенфиров А.А. Проектирование транспортных тоннелей: учеб. пособие. Омск: СибАДИ, 2008. 262 с.

3. Селицкая Н.В., Сачкова А.В. Проектирование тоннеля, сооружаемого методом щитовой П79 проходки. Белгород: Изд-во БГТУ, 2013. 28 с.

4. Селицкая Н.В., Сачкова А.В., Духовный Г.С. Проектирование тоннеля, сооружаемого методом щитовой проходки. Белгород: БГТУ, 2013. 30 с.

5. Байдабеков А.К. Биквадратичные преобразования. Минск: БНТУ, 2012. 190 с.

6. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). М.: Машиностроение, 1987. 192 с.