

УДК 535.41:778.38

ИСКАЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ САМОРЕПРОДУКЦИЙ ПРОЗРАЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ

Тынышова Т.Д.

*Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры
им. Н. Исанова, Бишкек, e-mail: tolgonay.tynyshova@mail.ru*

Рассмотрен эффект саморепродуцирования для регулярного объекта типа одномерная линейная решетка. Показано, что решение задачи исследования изменения распределения саморепродукций при прохождении света сквозь прозрачную среду – это последовательный процесс перехода от простых сред, таких как плоскопараллельная пластина, к более сложным, распределение показателей преломления которых может иметь достаточно произвольный вид. В предлагаемой работе проведен теоретический анализ влияния среды типа прозрачная плоскопараллельная пластина на распределение плоскостей саморепродукции, которое формируется при освещении плоской волной одномерной линейной решетки. Проведенный анализ влияния простейшей фазовой среды, типа тонкой плоскопараллельной пластины, на картину распределения плоскостей саморепродукции, показывает, что при использовании плоскопараллельной пластины происходят сдвиги плоскостей саморепродуцирования вдоль осей нормальной плоскости решетки и параллельной этой плоскости. Причем эти сдвиги сильно зависят от толщины пластины и показателя преломления материала пластины. То есть плоскопараллельная пластина не искажает картину последовательности плоскостей саморепродуцирования, а только смещает всю картину, как целое, в направлении указанных осей. Полученный результат важен с точки зрения разработки интерферометров на основе эффекта саморепродуцирования, в том числе интерферометров голографического типа.

Ключевые слова: линейная решетка, фазовая среда, плоскопараллельная пластина, саморепродукция, интерферометр

DISTORTIONS OF THE SEQUENCE OF SELF-REPRODUCTIONS BY TRANSPARENT PLATE

Tynyshova T.D.

*Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture named after N. Isanov, Bishkek,
e-mail: tolgonay.tynyshova@mail.ru*

The article shows that analyzing the influence of phase media on the pattern of distribution of self-reproduction planes in general form is a rather complicated task. It is shown that solving the problem of studying changes in the distribution of self-products when light passes through a transparent medium is a sequential process of transition from simple media, such as a plane-parallel plate, to more complex ones, the distribution of refractive indices of which can have a rather arbitrary appearance. In the proposed work, a theoretical analysis of the influence of a transparent plane-parallel plate on the distribution of self-reproduction planes, which is formed when a plane wave passes through a one-dimensional linear grating, is carried out. The analysis of the effect of the simplest phase medium, such as a thin plane-parallel plate, on the distribution pattern of self-reproduction planes, shows that when using a plane-parallel plate, there are shifts of self-reproduction planes along the axis which is normal to grating plane and along the axis parallel to this plane. Moreover, these shifts strongly depend on the thickness of the plate and the refractive index of the material of the plate. That is, a plane-parallel plate does not distort the pattern of a sequence of self-reproduction planes, but only shifts the whole picture, as a whole, in the direction of the indicated axes. The result obtained is important from the point of view of the development of interferometers based on the effect of self-reproduction, including holographic interferometers.

Keywords: linear grating, phase medium, plane-parallel plate, self-reproduction, interferometer

Явление саморепродуцирования изучено достаточно подробно. Однако влияние на данный эффект фазовых сред различного вида рассмотрено недостаточно. Учет воздействия фазовых сред очень важен для целей практического применения саморепродуцирования, в первую очередь в интерферометрии [1–3]. Решение задачи исследования изменения распределения саморепродукций при прохождении света сквозь прозрачную среду – это последовательный процесс перехода от простых сред, таких как плоскопараллельная пластина, к более сложным, для которых распределе-

ние показателей преломления может иметь достаточно произвольный вид.

Целью данной работы является теоретический анализ влияния среды типа прозрачная плоскопараллельная пластина на распределение плоскостей саморепродукции, которое формируется при освещении плоской волной одномерной линейной решетки.

*Саморепродуцирование в присутствии
прозрачной плоскопараллельной пластины*

Эффект саморепродуцирования проще всего рассмотреть на примере регулярного объекта типа одномерная линейная решет-

ка, имеющего пропускающий коэффициент следующего вида [4]:

$$\sigma(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(i2\pi x_1 n/d), \quad (1)$$

здесь d – период регулярного объекта. Регулярный объект располагают в плоскости, проходящей через начало координат. Пло-

скость исследуемого прозрачного объекта проходит через точку z_2 оптической оси и задается координатами (x_2, y_2) (рис. 1).

Освещаем регулярный объект волной с плоским фронтом и единичной амплитуды $V_1(x_1, y_1, z_1^-) = \exp(ikz_1^-)$.

В непосредственной близости за регулярным объектом получаем волну следующего вида:

$$V_1(x_1, y_1, z_1^+) = V_1(x_1, y_1, z_1^-) \sigma(x_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(i2\pi x_1 n/d). \quad (2)$$

Расположенная вблизи точки z_2 исследуемая прозрачная среда воздействует на исходную волну, прошедшую сквозь регулярный объект. До среды волна имеет вид

$$V_2(x_2, y_2, z_2^-) = \frac{1}{2} \exp(ikz_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp \left[i2\pi \left(x_2 n/d - \frac{n^2 \lambda z_2}{2d^2} \right) \right]. \quad (3)$$

Вид волны, подвергшейся воздействию прозрачной среды $V_1(x_2, y_2)$, описывается следующим соотношением [4]:

$$V_2(x_2, y_2, z_2^+) = \frac{1}{2} \exp(ikz_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n V_1(x_2, y_2) \exp \left[i2\pi \left(x_2 n/d - \frac{n^2 \lambda z_2}{2d^2} \right) \right]. \quad (4)$$

Если пропускающая среда не имеет амплитудной составляющей, то она задается следующим выражением

$$V_1(x_2, y_2) = \exp[i\theta(x_2, y_2)]. \quad (5)$$

Трансформированная волна, подвергаясь воздействию прозрачной среды, имеет следующий вид:

$$V_2(x_2, y_2, z_2^+) = \frac{1}{2} \exp(ikz_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp[i\theta(x_2, y_2)] \exp \left[i2\pi \left(x_2 n/d - \frac{n^2 \lambda z_2}{2d^2} \right) \right]. \quad (6)$$

Если следовать схеме, которая представлена на рис. 1, то для распределения интенсивности, измененного объектом, в соответствии с формулой (6), особенности данного распределения задаются искажениями фронта волны, вносимыми рассматриваемой средой. По сути, данное распределение представляет собой многолучевую интерференционную картину, которая формируется в результате интерференции пространственных гармоник, просвечивающих объект под разными углами.

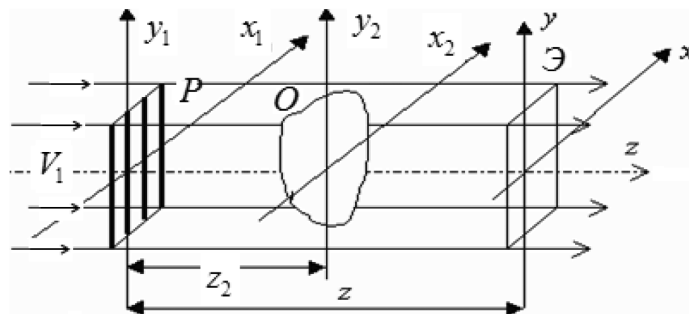


Рис. 1. Схема интерферометра, основанного на явлении саморепродукции:
P – линейная решетка; *O* – прозрачный объект; *Э* – экран

Изменение фазы волны, прошедшей сквозь прозрачную среду, обозначим как $\theta(x_2, y_2)$ [5–7].

Вид волны непосредственно перед исследуемой прозрачной средой представим как $V_2(x_2, y_2, z_2^-)$. Волна, прошедшая прозрачную среду, представляется как произведение фазового распределения исследуемой среды на значение волны перед объектом:

$$V_2(x_2, y_2, z_2^+) = V_2(x_2, y_2, z_2^-) \exp[i\theta(x_2, y_2)]. \quad (7)$$

Модуль амплитуды волны для произвольной координаты z находим по известному значению интенсивности. Фаза волны определяется методом последовательного приближения [4].

Исходя из сказанного, результирующее поле для произвольной точки вдоль оптической оси задается соотношением

$$V_1(x_3, y_3, z) = \frac{1}{i\lambda(z - z_2)} \exp\left[ik/z - z_2(x_3^2 + y_3^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} V(x_2, y_2, z_2^+) \times \\ \times \exp[i\theta_0(x_2, y_2)] \exp\left[ik/2(z - z_2)(x_2^2 + y_2^2)\right] \exp\left[ik/2(z - z_2)(x_2x_3 + y_2y_3)\right] dx_2 dy_2. \quad (8)$$

Оставляем неизменным фазовый множитель в $V_1(x_3, z_3, z)$, а амплитудную часть заменяем на $|V_1(x_3, z_3, z)|$. После обратного преобразования Фурье получаем $V_2(x_2, y_2, z_2) \exp[i\theta_1(x_2, y_2)]$. Подставляем рассчитанный фазовый множитель $\theta_1(x_2, y_2)$ в (8). Повторяем цикл до тех пор, пока не получаем стационарное решение $\theta_m(x_2, y_2) \approx \theta_{m+1}(x_2, y_2)$, где m – номер итерации. Наибольшее значение m оценивается тем, насколько близко значение $\theta_0(x_2, y_2)$ к реальному значению $\theta(x_2, y_2)$. В случае тальбот-интерферометрии интерференционную картину формируют $2M + 1$ гармоник, здесь M – максимальный порядок дифракции. Полное число рассматриваемых точек при численных расчетах задаем исходя из общеизвестных положений теоремы отсчетов, которые определяют необходимость описания минимальных неоднородностей среды не менее чем двумя точками дискретизации. Если рассматривать среду, имеющую сложный характер изменения неоднородностей, т.е., в конечном счете, сложный характер распределения показателя преломления фазовой среды, то проблема нахождения фазы волны становится очень сложной, часто просто не имеющей решения, по крайней мере однозначного решения. При рассмотрении более простых пропускающих сред, в нашем случае – это плоскопараллельная пластина, задача нахождения амплитуды световой волны, прошедшей сквозь фазовую среду, становится вполне решаемой даже аналитическими методами [8–9].

Задача оценки влияния пропускающей плоскопараллельной пластины на распределение плоскостей саморепродукции решается с помощью рассмотрения отдельной гармоники, K -й гармоники, ее поведения при прохождении среды толщиной l и показателем преломления n . Для общности рассматриваемой задачи будем считать, что

пластина составляет с оптической осью некоторый произвольный угол γ . K -я гармоника световой волны, после прохождения фазовой среды, образует с оптической осью угол θ . Значение этого угла определяется дифракционным условием $\theta = \arcsin \frac{K\lambda}{d}$,

где λ – длина световой волны, а d – период регулярного объекта. На рис. 2 схематично представлены направления распространения световой волны, ее K -я гармоника, в отсутствие фазовой среды – линия AM' и в присутствии пропускающей пластины – линия $АСКМ$. Угол падения световой волны на пластину равен $\theta + \gamma$, φ – угол, под которым свет преломляется в фазовой среде.

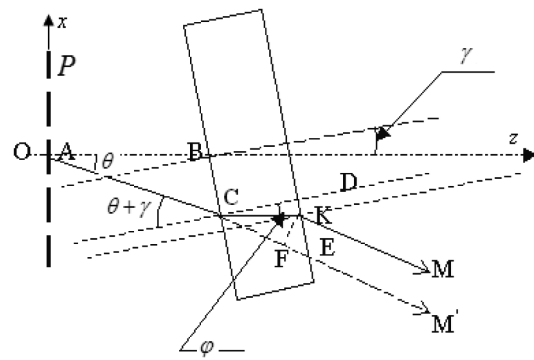


Рис. 2. Воздействие пропускающей плоскопараллельной пластины на K -ю гармонику световой волны

Изменение направления распространения K -й гармоники световой волны при прохождении в фазовую среду определяется соотношением

$$\sin \varphi = \frac{\sin(\theta + \gamma)}{n}. \quad (9)$$

При прохождении пропускающей среды фаза волны, ее K -й гармоники, отличается от фазы этой гармоники в случае отсутствия фазовой среды на величину, определяемую соотношением

$$\sigma_p = \frac{k\ell}{\cos\varphi} [n - \cos(\theta + \gamma - \beta)]. \quad (10)$$

Считая углы θ, γ, φ достаточно малыми, после ряда последовательных преобразований, учитывающих в первую очередь малые значения углов, получаем для изменения фазы световой волны под воздействием плоскопараллельной пропускающей пластины следующее соотношение:

$$\sigma_p = k\ell \left[n - 1 + \frac{1}{2}(\theta + \gamma)^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (11)$$

Изменение характера световой волны при удалении ее на произвольное расстояние z от плоскости регулярного объекта, в нашем случае плоской одномерной линейной решетки, можно рассчитать, воспользовавшись соотношением (8) для расчета светового поля:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda(z - z_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int V_2(x_2, y_2, z_2^+) L(x_1, y_1) \exp(i\sigma_p) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda(z - z_2)} [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] \right\} dx_2 dy_2, \quad (12)$$

здесь $L(x_1, y_1)$ – характерные размеры одномерной линейной решетки, $V_2(x_2, y_2, z_2^+)$ значение световой волны непосредственно после фазовой среды, которой в нашем случае является пропускающая плоскопараллельная пластина.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda(z - z_2)} \int_{-b}^b \int_{-b}^b \frac{1}{2} \exp[ik(z - z_2)] \times \\ \times \sum_{m=-K}^K b_m \exp \left\{ ik\ell \left[n - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m\lambda}{d} + \gamma \right)^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \right\} \exp \left[i2\pi \left(\frac{x_2 m}{d} - \frac{m^2 \lambda z_2}{2d^2} \right) \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda(z - z_2)} [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] \right\} dx_2 dy_2. \quad (13)$$

Здесь K – наибольшее значение дифракционного порядка в спектре световой волны после прохождения одномерной линейной решетки.

Преобразование Френеля, которым, по сути, является соотношение (13), легко сводится к преобразованию Фурье.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2i\lambda z} \exp \left\{ ik \left[z + \ell \left[(n - 1) + \frac{\gamma^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \right] \right\} \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \times \\ \times \sum_{m=-K}^K b_m \exp \left[ik\ell \left(\frac{1}{2} \frac{m^2 \lambda^2}{d^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \times \\ \times \int_{-b}^b \int_{-b}^b \exp(i2\pi x_2 m/d) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (x_2^2 + y_2^2) \right] \times \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x_2 x + y_2 y) \right] dx_2 dy_2. \quad (14)$$

Результирующее соотношение для светового поля, которое представляет собой сформированные линейной одномерной решеткой и фазовой средой типа пропускающая плоскопараллельная пластина распределение в пространстве последовательности саморепродукций, имеет вид

$$V_p(x, y, z) = \frac{1}{2\lambda z} \exp \left\{ ik \left[z + \ell \left[(n-1) + \frac{\gamma^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \right] \right\} \sum_{m=-K}^K b_m \exp \left\{ 2\pi i \left[\frac{m}{d} \left[x + \gamma \ell \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] - \frac{m^2 \lambda}{2d^2} \left[z - \ell \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \right] \right\} \left\{ Fr \left[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} (b-y) \right] - Fr \left[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} (-b-y) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ Fr \left[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} \left[b-x + \frac{m\lambda z}{d} + \frac{m}{d} \gamma \ell \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] - Fr \left[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} (-b-x) + \frac{m\lambda z}{d} + \frac{m}{d} \gamma \ell \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

здесь $Fr(x) = \int_0^x \exp \left(i \frac{\pi}{2} u^2 \right) du$ – интеграл Френеля [10].

Выводы

Проведенный анализ влияния простейшей фазовой среды, типа тонкой плоскопараллельной пластины, на распределение светового поля, формирующего последовательность саморепродукций, установил (формула (15)), что фазовая среда, подобная пропускающей плоскопараллельной пластине, осуществляет смещение саморепродуцированных изображений решетки на расстояние $l \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ вдоль оптической оси и на $\gamma l \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ в направлениях нормальных оптической оси. То есть общий вид картины саморепродуцированных изображений решетки не изменяется, однако присутствуют смещения вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, которые зависят от трех параметров, таких как толщина и показатель преломления пластины и угол падения световой волны на плоскость пластины. Полученный результат важен с точки зрения разработки интерферометров на основе эффекта саморепродуцирования, в том числе интерферометров голографического типа.

Список литературы

1. Lohmann A.W., Silva D.E. An interferometer based on the Talbot effect. *Opt. Commun.* 1971. V.2. No. 9. P. 413–415.
2. Исманов Ю.Х. Голографический эффект Тальбота в интерферометрии // *Вестник КРСУ.* 2015. № 5 (15). С. 101–103.
3. Ismanov Y.Kh., Tynyshova T.D., Aidaraliev Z.K. Wide-range holographic interferometer. *Optical Engineering.* 2018. V. 57. No. 12. 124106. DOI: 10.1117/1.OE.57.12.124106.
4. Исманов Ю.Х., Кулмурзаев Н.М., Тургумбаев Н.А. Эффект Тальбота для плоскопараллельной пластины // *Вестник КГУСТА.* 2011. № 2 (32). Т. 1. С. 121–125.
5. Kim M., Scharf T., Menzel C., Rockstuhl C., Herzog H.P. Talbot images of wavelength-scale amplitude gratings. *Optics Express.* 2012. V. 20. Issue 5. P. 4903–4920. DOI: 10.1364/OE.20.004903.
6. Jianming W., Yong Z., Min X. The Talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics. *Advances in Optics and Photonics.* 2013. No. 5(1). P. 83–130. DOI: 10.1364/AOP.5.000083.
7. Исманов Ю. Х., Тынышова Т. Д., Алымкулов С. А. Использование приближения Френеля для расчета распределения светового поля, прошедшего сквозь решетку // *Вестник КГУСТА.* 2017. № 3 (57). С. 171–178.
8. Iwata K., Satoh K. and Moriwaki K. Relaxation of the Talbot condition in generalized grating imaging. *Applied Optics.* 2012. V. 51. Issue 16. P. 3137–3144. DOI: 10.1364/AO.51.003137.
9. Chu Yen-Chang, Chen Jing-Heng and Chen Kun-Huang Curvature Measurement based on Talbot Effect and Image Moiré Interferometry. *Digital Holography & 3-D Imaging Meeting (Optical Society of America, 2015), paper DTh3A.7.* DOI: 10.1364/DH.2015.DTh3A.7.
10. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике.* М.: Наука, 1973. 832 с.