УДК 517

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТВЕЙВЛЕТОВ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

[1]Кудуев А.Ж., [1]Турсунов Э.А., [2]Абдыкалык Ж.А., [3]Турсунов Д.А.

[1]Ошский государственный университет, Ош, e-mail: altynbek_kuduev@mail.ru;

[2]Ошский государственный юридический институт, Ош, e-mail: gold_chingiz@mail.ru;

[3]Филиал Российского государственного социального университета, Ош, e-mail: tdaosh@gmail.com

При помощи всплесков (вейвлетов) можно анализировать кратковременные локальные особенности сигналов. Поэтому исследователям уже стало известно, что мультивсплески обладают существенными преимуществами по сравнению с преобразованием Фурье. Самым отличительным свойством мультивсплесков является то, что они позволяют построить базис. И в этом базисе данные могут выражаться небольшим количеством ненулевых коэффициентов. А это как раз подходит для сжатия данных (рисунков, видео, аудио и т.п.). Сегодня мультивсплески применяются во всех сферах современной науки и техники. В данной статье рассматривается применение кубических сплайн-всплесков к численному решению двухточечных краевых задач Неймана для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Полуортогональные кубические Эрмитовы мультивсплески на суперкомпактном носителе, равном носителю базисного сплайна, построены относительно скалярного произведения с производными. Всплески принадлежат классу непрерывных функций и имеют меньший. Также построены модифицированные базисные сплайн-всплески вблизи граничных точек. Полученные численные результаты демонстрируют преимущество построенных базисных полуортогональных кубических Эрмитовых сплайн-всплесков. Следует отметить, что численные результаты показывают, что точность приближенного решения улучшается с увеличением точек в сетке. И количество точек в сетке не влияет на число обусловленности определяющей матрицы.

Ключевые слова: всплеск, мультивсплеск, сплайн-всплеск, Эрмитов кубический сплайн, краевая задача, численное решение

APPLICATION OF MULTWAVELETS TO THE NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

[1]Kuduev A.Zh., [1]Tursunov E.A., [2]Abdykalyk Zh.A., [3]Tursunov D.A.

[1]Osh State University, Osh, e-mail: altynbek_kuduev@mail.ru;

[2]Osh State Law Institute, Osh, e-mail: gold_chingiz@mail.ru;

[3]Branch of the Russian State Social University, Osh, e-mail: tdaosh@gmail.com

Wavelets have significant advantages over the Fourier transform, because they can be used to analyze short-term local features of signals, such as short bursts or dips, breaks and steps, etc. The unique properties of wavelets allow you to create a basis in which the data can be expressed by a small number of nonzero coefficients. This property makes wavelets attractive for data compression, including video and audio information. Today wavelets are used in all areas of science and technology. This article discusses the use of cubic spline wavelets for the numerical solution of Neumann boundary value problems for linear inhomogeneous second order ordinary differential equations. Hermite's semi-orthogonal cubic multivelets on supercompact carrier, equal to the carrier of the base spline, are built with respect to the scalar product with derivatives. Wavelets belong to the class of continuous functions and have supersupport. Also, modified base spline wavelets near the boundary points are constructed. The obtained numerical results demonstrate the advantage of the constructed basic semi-orthogonal cubic Hermitian wavelets of splines. It should be noted that the numerical results show that the accuracy of the approximate solution increases with increasing points in the grid. And the number of points in the grid does not affect the conditionality number of the defining matrix.

Keywords: wavelet, multiwavelet, spline-wavelet, Hermite cubic spline, boundary value problem, numerical solution

Автором термина «вейвлет» (wavelet) являются Гроссманн (Grossmann) и Морле (Morlet). Они в середине 1980-х гг. при анализе свойств сейсмических и акустических сигналов ввели этот термин [1]. Их работа послужила толчком исследования вейвлетов рядом ученых, таких как Добеши, Мейер, Малл, Фарж, Чуи и др. Термин «вейвлет» звучит как маленькая или короткая волна. Малость относится к условию, что эта функция имеет конечную длину (компактный носитель). Волна относится к условию, что функция колебательная (осциллирующая). В некоторых русскоязычных литературах термин «вейвлет» переведен как «всплеск». Далее мы используем этот термин. К всплеску можно применить две операции: сдвиг и масштабирование. Под сдвигом понимается перемещение области его локализации во времени; а под масштабированием растяжение или сжатие, т.е. перемещение области его локализации по частоте. Использование операций сдвиг и масштабирование, с учетом свойства локальности всплеска в частотно-временной области, позволяет нам анализировать данные на различных масштабах и точно определять положение их характерных особенностей во времени [2, 3]. В работе [4] исследованы реализации сплайн-всплескового разложения первого порядка. А в [5] интерполяционные всплески применены в краевых задачах Дирихле в круге для однородного уравнения с оператором Лапласа.

В [6] было доказано, что полуортогональные кубические мультивсплески на суперкомпактном носителе, равном носителю базисного сплайна, можно построить относительно скалярного произведения с производными. В [3] для случая сплайнов третьей степени получен алгоритм всплеск-преобразования в виде решения трехдиагональной системы линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием. Представлены результаты численных экспериментов по вычислению производных дискретно заданной функции. Применение эрмитовых мультивсплесков седьмой степени для решения дифференциальных уравнений четвертого порядка рассмотрено в [7].

Цель исследования: применить Эрмитовы кубические сплайн-всплески к численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений и показать преимущества предлагаемого метода.

Результаты исследования и их обсуждение

Введем следующие обозначения:

$H^1(0,1)$ – пространство непрерывных функций на интервале (0,1), т.е. $u(x) \in C(0,1)$ таких, что $u'(x) \in L_2(0,1)$;

$H_1^1(0,1)$ – замыкание множества $\{u \in C[0,1] \cap C'[0,1] : u'(0) = u'(1) = 0\}$ в $H^1(0,1)$;

Π_3 – множество кубических многочленов;

V_n – пространство кубических сплайнов, удовлетворяющих следующим условиям, $n > 0$:

а) $v \in C[0,1] \cap C'[0,1]$;

б) $v'(0) = v'(1) = 0$;

в) $v|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)} \in \Pi_3|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)}$,

$j = 0,1,...,2^n - 1$ $j = 0,\ldots,2^n - 1$;

$\dim(V_n) = 2^{n+1}; \|u(t) - u_n(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (u(t) - u_n(t))^2}$,

$C(A_n)$ – число обусловленности матрицы A_n.

Ранее построенные всплески, например вейвлеты Добеши, Мейер, Малл, Фарж, Чуи и др., не имеют аналитического представления и расположены на достаточно широком носителе. Эти свойства можно считать недостатками всплесков. Аналитическое представление всплесков с суперкомпактным носителем удачно подходит к применению всплесков для численного анализа. В работах [6] предложен новый подход к построению базисных всплесков с суперкомпактным носителем на пространстве эрмитовых кубических сплайнов, т.е. всплески ортогональны со скалярным произведением производных $< u', v' >$. Всплески ортогональные со скалярным произведением производных $< u', v' >$ лучше подходят для применения мультивсплесков к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка. В работах [8, 9] эти всплески применены для решения интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть ϕ_1 и ϕ_2 кубические сплайны вида [8, 9]:

$$\phi_1(x) = (x+1)^2(1-2x)\chi_{[-1,0]}(x) + (1-x)^2(1+2x)\chi_{[0,1]}(x),$$

$$\phi_2(x) = (x+1)^2\, x\, \chi_{[-1,0]}(x) + (1-x)^2\, x\, \chi_{[0,1]}(x),$$

где $\chi_{[a,b]}(x)$ – характеристическая функция, $\chi_{[a,b]}(x) = 1$, при $x \in [a,b]$ и $\chi_{[a,b]}(x) = 0$, при $x \notin [a,b]$.

Множество $\mathbf{\Phi}_n := \{\phi_1(2^n \cdot - j) : j = 0,1,...,2^n\} \cup \{\phi_2(2^n \cdot - j)|_{(0,1)} : j = 1,...,2^n - 1\}$, является базисом для пространства V_n. Элементы множества Φ_n обозначим через $\{v_1,...,v_{2^{n+1}}\}$.

Множество всплесков обозначим через Ψ_n:

$$\mathbf{\Psi}_n := \{\psi_1(2^n \cdot - j) : j = 0,1,...,2^n\} \cup \{\psi_2(2^n \cdot - j)|_{(0,1)} : j = 1,...,2^n - 1\}.$$

Пространство, натянутое на множество всплесков, обозначим через W_n. Нетрудно заметить, что размерность этого пространства $\dim(W_n) = 2^{n+1}$.

Всплески ψ_1, ψ_2 конкретизируются ниже.

В работе [6] доказано следующее равенство:

$$\int_0^1 w'(x)v'(x)dx = 0,\ \forall w \in \Psi_n,\ \forall v \in \Phi_n. \tag{1}$$

Пересечение пространств сплайнов V_n и всплесков W_n не пустое, т.е. $V_n \cap W_n = \{0\}$. Как отмечено выше, размерности этих пространств $\dim(\mathrm{V}_n) = 2^{n+1}$, $\dim(W_n) = 2^{n+1}$ и если учитывать, что сумма $V_n + W_n \subseteq V_{n+1}$ то

$$\dim(V_n + W_n) = \dim(V_n) + \dim(W_n) = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2} = \dim(V_{n+1}).$$

Отсюда получаем, что $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$, т.е. $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$, $V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$, ..., $V_3 = V_2 \oplus W_2$, $V_2 = V_1 \oplus W_1$. Таким образом, получаем разложение пространства $H_1^1(0,1)$:

$$H_1^1(0,1) = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots .$$

Как отмечено выше, $\Phi_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; а элементы множества вейвлетов Ψ_n обозначим через $\Psi_n = \{w_2^{n+1}, \dots, w_2^{n+2}\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Теперь приступим к построению базиса Рисса.

Введем обозначение, пусть $g_k := v_k / \|v'_k\|_2$ при $k = 1,2,3,4$ и $g_k := w_k / \|w'_k\|_2$ при $k > 4$. Тогда $\|g'_k\|_2 = 1$ при $n \in \mathbf{N}$. Последовательность $(g'_k)_{k\in\mathbf{N}}$ является последовательностью Рисса в $L_2(0,1)$ [8, 9].

Очевидно, что эрмитовы кубические сплайны ϕ_1 и ϕ_2 удовлетворяют условиям

$$\phi_1, \phi_2 \in C^1[0,1], \phi_1(0) = 1, \phi'_1(0) = 0, \phi_2(0) = 0, \phi'_2(0) = 1.$$

Поэтому эрмитова интерполяция для непрерывно дифференцируемой функции в оси $f \in C^1(R)$ имеет следующий вид:

$$u = \sum_{j\in Z} f(j)\varphi_1(\cdot - j) + f'(j)\varphi_2(\cdot - j),$$

где $u(j) = f(j), u'(j) = f'(j),\ j \in Z$.

Пусть пространство S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное сплайнами ϕ_1 и ϕ_2. В таком случае, функция g принадлежит пространству S тогда и только тогда, когда существуют две последовательности b_1, b_2 на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$, для которых выполняется равенство [8, 9]:

$$g = \sum_{j\in Æ}\left[b_1(j)\varphi_1(\cdot - j) + b_2(j)\varphi_2(\cdot - j)\right].$$

Пусть $S_1 = \{g(2\cdot): g \in S\}$, тогда $S \subset S_1$. Мы ищем пространство всплесков W, для которого выполняется условие $S_1 = S \oplus W$, т.е. «дополняет» пространство S до S_1. Мы ищем два всплеска ψ_1, ψ_2, сдвиги которых порождают пространство всплесков W. Учитывая (1), также требуем выполнение равенств

$$<\psi'_1, \phi'_1(\cdot - \mathrm{j})> = <\psi'_2, \phi'_1(\cdot - \mathrm{j})> = 0,\ j \in Z,$$

$$<\psi'_1, \phi'_2(\cdot - \mathrm{j})> = <\psi'_2, \phi'_2(\cdot - \mathrm{j})> = 0,\ j \in Z. \tag{2}$$

Для этой цели нам необходимо вычислить скалярное произведение производных сдвигов кубических эрмитовых сплайнов ϕ_1 и ϕ_2. Заметим, что

$$\phi'_1(x) = -6x(x+1)\chi_{[-1,0]}(x) + 6x(\mathrm{x}-1)\chi_{[0,1]}(x),$$

$$\phi'_2(x) = (1+x)(1+3x)\chi_{[-1,0]}(x) + (1-x)(1-3x)\chi_{[0,1]}(x).$$

Предположим, что искомые всплески имеют вид

$$\psi(x) = \sum_{k\in Æ}\left[b_1(k)\varphi_1(2x-k) + b_2(k)\varphi_2(2x-k)\right],\ x \in \mathbf{R}.$$

Вычисляя скалярное произведение с производными, получим

$$20 < \psi', \phi'_1(\cdot - j) >= -21b_1(2j-2) + 42b_1(2j) - 21b_1(2j+2) - 3b_2(2j-2) + 4b_2(2j-1) -$$

$$-4b_2(2j+1) + 3b_2(2j+2),$$

$$120 < \psi', \phi'_2(\cdot - j) >= 33(b_1(2j-2) - b_1(2j+2)) - 60(b_1(2j-1) - b_1(2j+1)) +$$

$$+4(b_2(2j-2) + b_2(2j+2)) - 12(b_2(2j-1) + b_2(2j+1)) + 28b_2(2j).$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты, введем преобразование Лапласа последовательностей b_1, b_2 на множестве целых чисел. Здесь положительная или отрицательная степень z означает сдвиг на один шаг по шаблону узлов эрмитового сплайна вправо или влево. Тогда

$$q_{11}(z) = \sum_{j\in Z} b_1(2j+1) z^{2j+1}, \quad q_{12}(z) = \sum_{j\in Z} b_1(2j) z^{2j},$$

$$q_{21}(z) = \sum_{j\in Z} b_2(2j+1) z^{2j+1}, \quad q_{22}(z) = \sum_{j\in Z} b_2(2j) z^{2j}.$$

Составляем функциональное уравнение. Решение функционального уравнения

$$Q(z)q(z) = 0,$$

где $z\in C\backslash\{0\}$, $j\in Z$, $q(z) = colon\{q_{11}(z)\ q_{12}(z)\ q_{21}(z)\ q_{22}(z)\}$,

$$Q(z) = \begin{pmatrix} 0 & -21z^2 + 42 - 21z^{-2} & 4z - 4z^{-1} & -3z^2 + 3z^{-2} \\ -60z + 60z^{-1} & 33z^2 - 33z^{-2} & -12z - 12z^{-1} & 4z^2 + 28 + 4z^{-2} \end{pmatrix},$$

будет означать, что скалярное произведение с производными равняется нулю, т.е.

$$< \psi', \phi'_m(\cdot - j) >= 0,\ m = 1,2.$$

Решая функциональное уравнение, находим два линейно независимых решения:

$$q_{11}(z) = -2z^{-1} - 2z,\ q_{12}(z) = 4,\ q_{21}(z) = -21z^{-1} + 21z,\ q_{22}(z) = 0;$$

и

$$q_{11}(z) = z^{-1} - z,\ q_{12}(z) = 0,\ q_{21}(z) = 9z^{-1} + 9z,\ q_{22}(z) = 12.$$

Эти два решения порождают искомые всплески ψ_1, ψ_2, их также называют материнскими всплесками:

$$\psi_1(x) = -2\phi_1(2x+1) + 4\phi_1(2x) - 2\phi_1(2x-1) - 21\phi_2(2x+1) + 21\phi_2(2x-1),$$

$$\psi_2(x) = \phi_1(2x+1) + \phi_1(2x-1) + 9\phi_2(2x+1) + 12\phi_2(2x) + 9\phi_2(2x-1).$$

Носителями построенных всплесков ψ_1, ψ_2 является отрезок от –1 до 1, они удовлетворяют условию (2), и их сдвиги генерируют пространство всплесков W, так что S_1 является прямой суммой S и W. Кроме того, ψ_1 – симметричен, а ψ_2 – антисимметричен.

Теперь мы построим всплеск-базис в пространстве $H_1^1(0,1)$ из этих сплайн-всплесков. Пусть выполняется равенство (1) и $v \in V_1$, $w_n \in W_n, n \in N$, тогда имеем, что для любого натурального n выполняется соотношение

$$< v', w'_n >= 0, < w'_m, w'_n >= 0,\ m \neq n.$$

Отсюда, получаем равенство

$$\left\| v' + \sum_{n=1}^{\infty} w'_n \right\|^2_{L_2(0,1)} = \|v'\|^2_{L_2(0,1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \|w'_n\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Пусть, при $n \in N$, $0 < x < 1$:

$$\psi_{n,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{307,2}} 2^{-n/2} \psi_2\left(2^n x - \frac{j}{2}\right), \text{ при } j = 2,4,\ldots,2^{n+1}-2,$$

$$\psi_{n,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{1459,2}} 2^{-n/2} \psi_1\left(2^n x - \frac{j-1}{2}\right), \text{ при } j = 3,5,\ldots,2^{n+1}-1,$$

$$\psi_{n,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{729,6}} 2^{-n/2} \psi_1\left(2^n x\right), \;\; \psi_{n,2^{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{729,6}} 2^{-n/2} \psi_1\left(2^n x - 2^n\right),$$

$$\varphi_{1,1}(x) = \sqrt{\frac{5}{12}}\varphi_1(2x), \quad \varphi_{1,2}(x) = \sqrt{\frac{5}{24}}\varphi_1(2x-1),$$

$$\varphi_{1,3}(x) = \sqrt{\frac{5}{12}}\varphi_1(2x-2), \quad \varphi_{1,4}(x) = \sqrt{\frac{15}{8}}\varphi_2(2x-1).$$

Тогда имеем

$$\left\|\psi'_{n,j}\right\|_{L_2(0,1)} = 1, \; j = 1,\ldots,2^{n+1}, \;\; \left\|\phi'_{1,j}\right\|_{L_2(0,1)} = 1, \; j = 1,2,3,4.$$

Ясно, что пространство V_1 разлагается на $\phi_{1,1}, \phi_{1,2}, \phi_{1,3}, \phi_{1,4}$. Отсюда следует, что $H_1^1(0,1)$ разлагается на $g_1, g_2, \ldots, g_{2^{n+1}}$, здесь $g_1 = \phi_{1,1}$, $g_2 = \phi_{1,2}$, $g_3 = \phi_{1,3}$, $g_4 = \phi_{1,4}$, $g_{2^{k+1}+j} = \psi_{k,j}$, $k = 1, 2, \ldots, n–1$, $j = 1, \ldots, 2^n$.

Нетрудно доказать, что $\left(\psi'_{n,j}\right)_{n\in N, 1\le j\le 2^{n+1}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$, или можно посмотреть [6].

Применение. В этом разделе мы используем построенные всплески для решения дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u(x) = f(x), \;\; 0 < x < 1, \tag{3}$$

с граничным условием Неймана

$$u'(0) = u'(1) = 0, \tag{4}$$

где $p, q, f \in C[0,1]$. Коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям: $0 \le p(x) \le c_3$, $0 \le q(x) \le c_4$, $x \in [0,1]$.

Если $q(x) \equiv 0$, то для разрешимости задачи (3)–(4) требуем выполнение условия

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Введем билинейную форму $a(u, v)$:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 p(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx,$$

где $u, v \in H_1^1(0,1)$.

Учитывая билинейную форму, задачу (3)–(4) можно записать в виде

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle, \; \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Отсюда получаем задачу Галеркина:

Найти $u_n \in V_n$, для которых выполняется равенство

$$a(u_n, v) = \langle f, v\rangle \;\; \forall v \in V_n. \tag{5}$$

Задача (5) имеет единственное решение [10]. Мы будем использовать выше построенное множество всплесков $G = \{g_1, \ldots, g_{2^{n+1}}\}$ как базис для пространства V_n. Тогда задача (5) дискретизируется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a\left(g_j, g_k\right) c_k = \left\langle g_j, f \right\rangle, \quad j = 1, \ldots, 2^{n+1}.$$

Введем обозначение $A_n = \left(a\left(g_j, g_k\right)\right)_{1 \le j,k \le 2^{n+1}}$.

Экспериментальная часть. Ниже привели применение построенных базисных всплесков G_n к конкретным дифференциальным уравнениям.

Вычисления проведены в системе MathCad 15.

Пример 1. $-u'' + u = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 6$, $u'(0) = u'(1) = 0$.

Точное решение $u(t) = 2t^3 - 3t^2$,

численное решение $u_{16}(t) = -5{,}821\times10^{-6}g_1(t) - 1{,}095g_2(t) - 1{,}549g_3(t) - 0{,}548g_4(t) -$

$$-1{,}736\times10^{-7}g_5(t) - 2{,}021\times10^{-11}g_6(t) + 1{,}742\times10^{-7}g_7(t) + 6{,}122\times10^{-7}g_8(t) +$$

$$+ 2{,}205\times10^{-6}g_9(t) + 3{,}702\times10^{-7}g_{10}(t) + 1{,}044\times10^{-6}g_{11}(t) + 9{,}274\times10^{-7}g_{12}(t) +$$

$$+ 5{,}646\times10^{-7}g_{13}(t) - 1{,}312\times10^{-6}g_{14}(t) + 3{,}148\times10^{-6}g_{15}(t) + 4{,}187\times10^{-7}g_{16}(t);$$

$$\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 3{,}933\times10^{-6},\ \|u(t) - u_8(t)\|_2 = 3{,}933\times10^{-6},\ \|u(t) - u_{16}(t)\|_2 = 3{,}933\times10^{-6},$$

$$C(A_4) = 19{,}69;\ C(A_8) = 19{,}69,\ C(A_{16}) = 19{,}69.$$

Пример 2. $-u'' + e^t u = \pi^2\cos(\pi t) + e^t\cos(\pi t)$, $u'(0) = u'(1) = 0$.

Точное решение $u(t) = \cos(\pi t)$,

численное решение $u_8(t) = 1{,}556g_1(t) - 2{,}771\times10^{-6}g_2(t) - 1{,}556g_3(t) - 1{,}179g_4(t) -$

$$-0{,}026g_5(t) + 5{,}798\times10^{-7}g_6(t) + 0{,}026g_7(t) + 0{,}029g_8(t);$$

$$\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 2{,}389\times10^{-3},\ \|u(t) - u_8(t)\|_2 = 2{,}092\times10^{-4},\ \|u(t) - u_{16}(t)\|_2 = 1{,}468\times10^{-5},$$

$$C(A_4) = 1{,}723;\ C(A_8) = 2{,}342,\ C(A_{16}) = 3{,}201.$$

Пример 3. $-u'' + u' + u = t^4 + 2t^3 - 17t^2 + 14t - 2$, $u'(0) = u'(1) = 0$.

Точное решение $u(t) = t^2(1-t)^2$,

численное решение: $u_8(t) = 3{,}502\times10^{-3}g_1(t) + 0{,}142g_2(t) + 3{,}331\times10^{-3}g_3(t) - 1{,}503\times10^{-5}g_4(t) -$

$$-0{,}019g_5(t) - 0{,}026g_6(t) - 0{,}019g_7(t) + 5{,}576\times10^{-5}g_8(t);$$

$$\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 1{,}37\times10^{-3},\ \|u(t) - u_8(t)\|_2 = 1{,}528\times10^{-4},\ C(A_4) = 20{,}9;\ C(A_8) = 21{,}21.$$

Следует отметить, что численные результаты показывают, что точность улучшается с повышением n. И значение n не влияет на число обусловленности матрицы A_n.

Работа выполнена при поддержке МОиН КР.

Список литературы

1. Grossmann A., Marlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. SIAM J. Math. Anal. 1984. no. 15. P. 723–736. DOI: 10.1137/0515056.

2. Шумилов Б.М. О сплайн-вейвлетах, полуортогональных с производными, и алгоритме с расщеплением // Сиб. журн. вычисл. матем. 2017. Т. 20. № 1. С. 107–120. DOI: 10.15372/SJNM20170108.

3. Сулайманов З.М., Шумилов Б.М. Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования кубических сплайнов на неравномерной сетке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 10. С. 1600–1614. DOI: 10.7868/S004446691710012X.

4. Демьянович Ю.К., Пономарев А.С. О реализации сплайн-всплескового разложения первого порядка // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXIX, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. № 453. С. 33–73.

5. Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Интерполяционные всплески в краевых задачах // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 4. С. 257–268. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-257-268.

6. R.-Q. Jia, S.-T. Liu. Wavelet bases of Hermite cubic splines. Adv. Comput. Math. 2006. no. 25. P. 23–39.

7. Турсунов Д.А. Применение эрмитовых мультивейвлетов седьмой степени для решения дифференциальных уравнений четвертого порядка // Известия АлтГУ. 2013. С. 72–75.

8. Турсунов Д.А. Применение сплайн-вейвлетов для решения интегро-дифференциальных уравнений // Известия АлтГУ. 2011. С. 42–44.

9. Турсунов Д.А., Эшаров Э.А., Бекмуратов А.Т. Численное решение интегро-дифференциальных уравнений с помощью эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник КРСУ. 2010. Т. 10. № 9. С. 140–142.

10. Brenner S.C., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods (Texts in Applied Mathematics). Volume 15: 3rd ed. Springer-Verlag New York. 2008. 400 p. DOI: 10.1007/978-0-387-75934-0.