

УДК 517.983:519.65

ПОЛУЧЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

¹Чекиров К.М., ²Джумагулов К.Р.

¹Международный Кувейтский университет, Бишкек;

²Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек,

e-mail: kubat_djumagulov@inbox.ru

На сегодняшний день нельзя не заметить важность исследования некорректных задач абстрактного моделирования, так как многие процессы нашей жизнедеятельности могут описываться операторными (дифференциальными и интегральными) уравнениями. Прямые и обратные задачи, описываемые данными уравнениями, не всегда представляются корректными, и зачастую решения подобных задач не могут быть получены аналитически, или аналитическое решение настолько громоздко, что появляется необходимость поиска решения менее сложными методами приближенных решений. Поэтому данная работа посвящена обоснованию итерационных алгоритмов для решения задач, описываемых в абстрактной форме операторным уравнением первого рода, вида $Ax = y$. Предлагается оптимальный выбор параметра останова. Строится итерационный алгоритм, дающий оптимальное по порядку решение. Предлагаемая в данной работе функция риска имеет своеобразный прикладной характер, поскольку зачастую процессы, моделируемые и формализуемые в абстрактные математические формулы и уравнения, в полученной модели имеют погрешности, изучение которых важно и актуально в практическом смысле. Таким образом, построение приближенного решения методами итераций, нахождение оптимального решения поставленной задачи посредством изучения функции риска, а также установление правила прекращения поиска решения и остановки на оптимальном решении (правило останова) имеют место исследования в данной работе.

Ключевые слова: некорректная задача, решающая процедура, функция риска, метод итераций, приближенное решение, операторное уравнение

OBTAINING APPROXIMATE OPTIMAL SOLUTIONS OF PROBLEMS DESCRIBED BY LINEAR OPERATOR EQUATIONS

¹Chekirov K.M., ²Dzhumagulov K.R.

¹International University of Kuwait, Bishkek;

²Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, e-mail: kubat_djumagulov@inbox.ru

To date, it is impossible not to notice the importance of studying ill-posed abstract modeling problems, since many of our life processes can be described by operator (differential and integral) equations. Direct and inverse problems described by these equations are not always correct, and, often, the solution of such problems cannot be obtained analytically, or the analytical solution is so cumbersome that it becomes necessary to search for solutions using less complex methods of approximate solutions. Therefore, this paper is devoted to the justification of iterative algorithms for solving problems that are described in abstract form by an operator equation of the first kind, of the form $Ax = y$. An optimal selection of the stop parameter is proposed. An iterative algorithm is constructed that gives a solution that is optimal in order. The risk function proposed in this paper has a peculiar applied character, since, often, processes modeled and formalized into abstract mathematical formulas and equations, in the resulting model, have errors, the study of which is important and relevant in a practical sense. Thus, the construction of an approximate solution by iteration methods, finding the optimal solution of the problem by studying the risk function, as well as establishing the rule for stopping the search for a solution and stopping at the optimal solution (the stopping rule), there are studies in this work.

Keywords: incorrect problem, solving procedure, risk function, iteration method, approximate solution, operator equation

В силу некоторой априорной информации о неизвестном точном решении поставленная задача классифицируется как некорректная задача [1, 2]. И поскольку класс задач, поставленных некорректно, зачастую требует регуляризирующих алгоритмов для получения тех или иных решений, то поиск решения задачи сводится к нахождению решающей процедуры, качество которой охарактеризовано так называемой функцией риска, или средней величиной погрешности решения. Получение оптимальных решений [3] приближенными методами – процесс достаточно трудоемкий. Поиск оптимальных решений задач, поставленных некоррек-

тно, чаще всего оборачивается итерационным процессом [4], который в свою очередь должен быть обеспечен нахождением правила останова, что вызывает трудности и громоздкость при попытке оценить погрешности [5]. Подобные итерационные процессы и проблемы поиска оптимальных решений детально изучены в научных исследованиях известных ученых, таких как А.М. Федотов, а также в работах В.П. Тананы [6], А.Б. Бредихиной [7], А.П. Гогиной [8], К.М. Чекирова [9], Е. Чжана [10]. В силу своей актуальности исследования по итерационным процессам и некорректным задачам, а также по методам регуляризации встречаются во

многих других работах современных исследователей в области вычислительной математики. Основой для дальнейших рассуждений получения подобных оптимальных решений посредством итераций является изучение поведения исходных данных с аддитивными случайными погрешностями. Таким образом, получая ошибки в исходных данных, смоделированных случайными величинами и имеющих корреляционную взаимосвязь, имеем задачу, классифицируемую как некорректная задача и требующую нахождения решения методами регуляризации, в результате применения которых имеет место возникновение погрешности решения, или так называемой функции риска. В классе всех решающих процедур с указанной функцией риска требуется найти оптимальное решение, поиском и нахождением которого, и обусловлена актуальность и научная значимость данной работы.

Цель исследования: получение оптимального решения операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве, посредством нахождения соответствующего вида оператора для множеств с регулярной границей. Наряду с этим построить оптимальный минимаксный алгоритм и задать способ построения регуляризующего алгоритма, а также параметра регуляризации для установки правила останова рассматриваемого итерационного процесса поиска решающей процедуры среди множества решающих процедур.

Материалы и методы исследования

В данной работе применены методы исследования операторных уравнений, операторы действуют в гильбертовых пространствах, исходные данные моделируются случайными величинами, то есть погрешности исходных данных заданы в соответствии с законами теории вероятностей и случайных величин. Используются понятия нахождения решающей процедуры и функции риска, характеризующей качество решающей процедуры, итерационные методы нахождения оптимальных решений поставленной задачи посредством установки правила останова, а также модифицированный способ построения регуляризующего алгоритма получения оптимального решения и оценки их погрешностей.

Результаты исследования и их обсуждение

Пусть задан класс задач, описываемый в абстрактной форме операторным уравнением первого рода вида

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $A: X \rightarrow Y$ – линейный оператор, действующий в гильбертовых пространствах X, Y , x – искомый, а y – данный элементы. Будем предполагать, что исходные данные заданы с аддитивной случайной погрешно-

стью, т.е. вместо точного значения исходных данных y известно

$$\tilde{y} = y + \xi. \tag{2}$$

Ошибки в задании исходных данных моделируются случайной величиной со значениями в пространстве Y с нулевым средним и заданным корреляционным оператором R , то есть

$$\begin{cases} M(\xi, u) = 0, \\ M[(\xi, u)(\xi, V)] = (Ru, V). \end{cases}$$

Для всех $u, V \in Y$ здесь M – математическое ожидание, (ξ, u) – скалярное произведение в пространстве Y . Относительно неизвестного точного решения уравнения (1) задана априорная информация вида

$$x \in W \subset X, \tag{3}$$

где W – компактное, абсолютно-выпуклое подмножество пространства решений X . Если оператор уравнения (1) не имеет ограниченного, то рассматриваемая задача относится к классу некорректно поставленных [1].

Следуя [2], произвольное отображение $d: Y \rightarrow X$ будем называть решающей процедурой для задачи (1)–(3). Качество произвольной решающей процедуры будем характеризовать ее функцией риска $R(x, d) = M \|d(Ax + \xi) - x\|^2$, то есть средней величиной погрешности решения при условии, что точное решения уравнения (1) равно x . Оптимальной решающей процедурой будем называть отображение d_0 , для которого справедливо $\sup_{x \in W} R(x, d_0) \inf_d \min_{x \in W} R(x, d)$.

В монографии [2] доказано, что при выполнении основного ограничения на задачу (1)–(3)

$$A[W] \subset \text{Ran}(R^{1/2}). \tag{4}$$

В классе всех решающих процедур с конечной функцией риска существует оптимальная, а в классе всех линейных решающих процедур построена последовательность линейных операторов, минимизирующая функционал погрешности вида $\theta[L] = \sup_{x \in W} R(x, L)$.

Эта последовательность имеет вид

$$L_n = B_n(E + FB_n)^{-1} A^* R^{-1}, \tag{5}$$

где $F = A^* R^{-1} A$ – информационный оператор задачи, B – последовательность операторов конечного ранга, максимизирующих функцию.

$$\gamma(B) = \text{tr}(B(E + FB_n)^{-1}). \tag{6}$$

На множестве $T(W)$ – выпуклой оболочки семейства операторов единичного ранга $\{S_x\}_{x \in W}, S_x u = [u, x]x$. Как отмечено в [2], выполнение условия (4) достаточно для того, чтобы информационный оператор задачи $F = A^* R^{-1} A$ является непрерывным.

В некоторых частных случаях задача о максимизации функции (6) решается аналитически, например когда множество W – эллипсоид или параллелепипед в пространстве X (см. раздел 14 в [2]). В случае параллелепипеда оператор B , максимизирующий функцию (6), суть оператор, этот параллелепипед порождающий. Ограничимся в целях простоты изложения априорным множеством, заданным в виде параллелепипеда. Для рассматриваемой в дальнейшем задачи итерационного уточнения, это довольно-таки общий случай, так как параллелепипед характеризует покоординатную точность априорного приближения к решению. Численная реализация задачи построения минимизирующей последовательности сопряжена с целым рядом сложностей, возникающих из-за необходимости обращать матрицы достаточно высокого порядка, к тому же при малом уровне шума являющиеся плохо обусловленными.

В настоящей работе сделана попытка обойти трудности, связанные с обращением матриц, при помощи итерационного процесса, дающего приближение к оптимальному решению с учетом того, что априорное множество W не слишком велико.

Будем считать, что нам из каких-либо предварительных вычислений известно приближение \tilde{x} к точному решению уравнения (1) и W – есть выпуклое центрально-симметричное множество с центром в \tilde{x} (точность приближения \tilde{x}). Наша задача состоит в построении итерационного уточнения приближения \tilde{x} . Не ограничивая общности \tilde{x} , можно считать нулем пространства решения X .

Рассмотрим итерационный процесс вида

$$\begin{cases} x_0 - \tilde{x} = 0, \\ x_{n+1} = Vx_n + (1+V)A^{-1}\tilde{y}, \end{cases} \quad (7)$$

где V – оператор перехода итерационного процесса (7). Например, для метода простой итерации, рассмотренного для задачи (1)–(3) в работе [9], оператор $V_1 = E - \tau A^* A$, а процесс (7) превращается в

$$x_{n+1} = x_n + \tau A^* (Ax_n - \tilde{y}). \quad (8)$$

То есть в легко реализуемую вычислительную процедуру. Из широко используемых на практике итерационных процессов

приведем еще процесс с оператором перехода $V_2 = (A+Q)^{-1}Q$, для которого процесс (7) примет вид

$$x_{n+1} = (A+Q)^{-1}Qx_n + (A+Q)^{-1}\tilde{y}. \quad (9)$$

Оператор Q выбирается из условий простоты обращения оператора $A+Q$. Итерационный процесс (9) порождает широко известное семейство регуляризованных, итерационных процессов.

В дальнейшем оператор перехода V будем выбирать из условия, что всегда определен оператор вида $(E-V^n)A^{-1}$.

Итерационный процесс (7) порождает семейство решающих процедур $\{dn\}_{n=1}^{\infty} : d_n(\tilde{y}) = x_n$. Функция риска решающей процедуры d_n порождаемой процессом (7), примет вид

$$R(x, d_n) = \|V^n x\|^x + tr((E-V^n)F^{-1}(E-V^n)^*).$$

Рассмотрим правило останова итерационного процесса (7). Будем выбирать оптимальное число итераций n_0 из следующих условий

$$\begin{aligned} n_0 = \max \{n : \sup_{x \in W} \|V^n x\|^2 \geq \\ \geq tr((E-V^n)F^{-1}(E-V^n)^*)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

При данном выборе числа итераций максимальная погрешность оптимальной итерационной процедуры допускает оценку

$$\sup_{x \in W} R(x, d_{n_0}) \leq 2 \sup_{x \in W} \|V^{n_0} x\|^2, \quad (11)$$

которая для параллелепипедного множества корректности W согласно [2] примет вид

$$\sup_{x \in W} R(x, d_{n_0}) \leq 2tr(V^{n_0}B(V^{n_0})^*). \quad (12)$$

В работе [7] было показано, что итерационный процесс (8) с $\tau \leq 1/\|A^*A\|$, если число итераций n_0 выбирать по правилу останова (10), определяет состоятельную решающую процедуру, т.е. $\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in W} R(x, d_0) = 0$,

однако ее скорость сходимости для произвольного оператора Q будет меньше скорости сходимости оптимальной решающей процедуры (5).

Модифицируем теперь правило останова [9] так, чтобы итерационный процесс (7) определял оптимальную по порядку решающую процедуру, то есть имеющую ту же скорость сходимости к нулю при $\delta \rightarrow 0$ что и оптимальная линейная решающая процедура [9]. Далее, приняв во внимание (12), правила прекращения решения для процесса поиска оптимального решения, запишем в виде

$$n_0 = \max \{n : tr(V^n B(V^n)^* - (E-V^n)F^{-1}(E-V^n)^*) \leq 0\}. \quad (13)$$

Для простоты предположим, что оператор V – самосопряженный положительный и все операторы, входящие в представление (13), перестановочны. Определим следующее правило останова:

$$n_1 = \min\{n : V^n B^{1/2} < (E - V^n)F^{-1/2}\}. \quad (14)$$

Откуда следует, что $V^{n_1} < (B^{1/2}F^{1/2} + E)^{-1}$, следовательно

$$V^{n_1} B^{1/2} < B((B^{1/2}F^{1/2} + E)^2)^{-1} < B(BF + E)^{-1}.$$

Таким образом, $tr(V^{n_1} B V^{n_1}) \leq tr(B(BF + E)^{-1})$, из правила (14) получаем

$$\begin{aligned} \sup R(x, d_1) &\leq 2tr((E - V^{n_1})F^{-1}(E - V^{n_1})) \leq \\ &\leq 2tr(V^{(n_1-1)} B V^{(n_1-1)}) \leq 2\|V^{-1}\|^2 tr(V^{n_1} B V^{n_1}) \leq 2\|V^{-1}\|^2 tr(B(BF + E)^{-1}). \end{aligned}$$

что гарантирует оптимальность по порядку итерационного процесса (7) с правилом останова (14). Очевидно, подобное правило останова можно определить и для неперестановочных операторов.

Следует отметить, что численная реализация итерационного процесса (7) значительно легче, чем реализация оптимальной линейной решающей процедуры, поскольку не требует обращений плохо обусловленных матриц, которые возникают при малых значениях мощности шума (мала величина $\|R\|$). Само правило останова можно существенно упростить, рассматривая неравенства для норм Гильберта – Шмидта, входящих в итерационный процесс матриц.

Для практической реализации наиболее удобен процесс вида (9) с матрицей $Q = B$ или $Q = \alpha E + B$, если B вырождена, $\alpha \geq 0$. Этот процесс требует для достижения момента останова значительно меньше итераций, чем процесс вида (8).

Отметим также, что правило останова (10) пригодно и для произвольного множества корректности W .

Заключение

В данной работе построены линейные оптимальные, регуляризующие и итерационные алгоритмы для построения приближенных решений задач, описываемых линейным операторным уравнением, исходные данные которой представлены приближенными значениями. И на основе рассмотрения понятия класса решающих процедур для данного уравнения вводится понятие функции риска решающих процедур, порожаемых итерационными процессами. Методом модификации правила останова существующей процедуры установлено правило останова для исследуемого итерационного процесса, посредством чего находится оптимальное по порядку решение

поставленной задачи. Стоит отметить, что подобные алгоритмы могут быть применимы и для других некорректно поставленных задач с перестановочными операторами. Особенностью рассмотренных методов поиска приближенного решения является то, что вместе с получением решения мы также получаем и оценку его погрешности.

Данный итерационный процесс построен в попытке избежать сложностей при аналитических решениях задач подобного рода.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука 1986. Изд. 3-е. 288 с.
2. Федотов А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1990. 279 с.
3. Бредихина А.Б. Исследование оптимальности метода проекционной регуляризации // Системы управления и информационные технологии. 2010. Т. 41. № 3. С. 70–72.
4. Гогин А.П., Карчевский М.М. Об одном итерационном методе для смешанных схем конечных элементов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. Т. 153. № 4. С. 5–10.
5. Гогин А.П., Карчевский М.М. Об оценках погрешности одного варианта смешанного метода конечных элементов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. Т. 155. № 2. С. 44–53.
6. Танана В.П., Бредихина А.Б. Об оптимальности одного обобщения метода М.М. Лаврентьева при решении уравнений с ошибкой в операторе // Труды института математики и механики УРО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 258–263.
7. Бредихина А.Б. Исследование и оценки погрешности некоторых методов регуляризации линейных операторных уравнений и их приложения: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. Челябинск, 2013. 117 с.
8. Гогин А.П. Оценки точности и итерационные процессы для смешанных методов конечных элементов решения квазилинейных эллиптических уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. Казань, 2014. 108 с.
9. Чекиров К.М. Анализ задачи аналитического продолжения в круге с целью построения эффективных алгоритмов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. Красноярск, 1995. 98 с.
10. Чжан Е. Методы решения линейных некорректных задач с априорной информацией и оценка погрешностей: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.03. Москва, 2014. 122 с.