СТАТЬИ

УДК 535.41:778.38

РАСЧЕТ СИНТЕЗИРОВАННОЙ ГОЛОГРАММЫ ФРЕНЕЛЯ

Жумалиев К.М., Исманов Ю.Х., Алымкулов С.А.

Институт физики им. академика Ж.Ж. Жээнбаева НАН Кыргызской Республики, Бишкек, e-mail: i_yusupjan@mail.ru

Рассмотрена задача расчета световых полей в зоне Френеля. Показано, что в общем случае эта задача сводится к расчету трехмерного интеграла Кирхгофа. Однако так как аналитически эта задача практически не разрешима, то для расчета голограмм в указанной зоне предлагается использовать приближение, которое сводит интеграл Кирхгофа к преобразованию Френеля. Поэтому для расчета световых полей в так называемой средней зоне (зона Френеля) трехмерный интеграл Кирхгофа сводят к двумерному интегралу Френеля. В рассмотренной работе предлагается оптимальный метод такого перехода, позволяющий свести к минимуму возникающие при этом погрешности. Кроме того предложена схема дискретизации амплитудных и фазовых составляющих световой волны, что позволяет эффективно осуществлять дискретизацию интеграла Френеля. Также показано, что дискретное преобразование Френеля можно свести к дискретному преобразованию Фурье, что позволяет использовать алгоритмы быстрого преобразования Фурье при расчетах синтезированных голограмм Френеля. При синтезировании голограмм предполагалось, что объект описывается достаточно гладкой функцией $|g_1(x,y)|$, которая представляет собой коэффициент отражения по интенсивности. Такая функция может быть восстановлена по ее точкам дискретизации посредством интерполирующей операции с помощью некоторой функции $\beta(x, y)$.

Ключевые слова: синтез голограммы, амплитуда волны, фаза волны, дискретизация, голограмма Френеля, интерполяция

CALCULATION OF THE FRESNEL SYNTHESIZED HOLOGRAM

Zhumaliev K.M., Ismanov Yu.Kh., Alymkulov S.A.

Institute of Physics named after academician Zh.Zh. Zheenbaev of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, e-mail: i_yusupjan@mail.ru

The task of calculating the light fields in the Fresnel zone is considered. It is shown that in the general case this problem reduces to the calculation of the three-dimensional Kirchhoff integral. However, since this problem is practically not solvable analytically, it is proposed to use an approximation to calculate holograms in this zone, which reduces the Kirchhoff integral to the Fresnel transform. Therefore, to calculate the light fields in the so-called middle zone (Fresnel zone), the three-dimensional Kirchhoff integral is reduced to a two-dimensional Fresnel integral. In this paper, we propose an optimal method for such a transition, which allows minimizing the errors that arise. In addition, a discretization scheme has been proposed for the amplitude and phase components of the light wave, which makes it possible to effectively discretize the Fresnel integral. It is also shown that the discrete Fresnel transform can be reduced to a discrete Fourier transform, which allows the use of fast Fourier transform algorithms in the calculations of synthesized Fresnel holograms. When synthesizing holograms, it was assumed that the object is described by a fairly smooth function $|g_1(x,y)|$, which is a reflection coefficient of intensity. Such a function can be restored at its discretization points by an interpolating operation using a certain function $\beta(x, y)$.

Keywords: hologram synthesis, wave amplitude, wave phase, discretization, Fresnel hologram, interpolation

Внешний вид любого объекта задают такие его характеристики, как его отражающие и рассеивающие свойства. Вид этих характеристик можно задать с помощью распределения коэффициентов отражения света, падающего на поверхность тела, по интенсивности $G(x, y, z)$ и амплитуде $g(x, y, z)$. Функциональная зависимость для амплитуды имеет вид

$$g(x,y,z) = |g(x,y,z)|\exp[i\alpha(x,y,z)]. \quad (1)$$

Модуль амплитудной составляющей $|g|$ и ее фазовая составляющая α задают фазовое изменение света, который падает после отражения от произвольной точки (x, y, z) рассматриваемого объекта. Функциональная связь между значениями G и g задается соотношением

$$G = |g|^2 = gg^*, \quad (2)$$

где «*» представляет собой комплексно сопряженные величины.

Для распределения амплитуд и фаз светового поля вдоль поверхности исследуемого объекта можно записать следующее выражение $L(x,y,z)\exp[i\gamma(x,y,z)]$. Распределение светового поля в этом случае для некоторой рассматриваемой поверхности задается в виде интегрального соотношения Кирхгофа

$$F(\nu,\mu,\tau) = \int\limits_{H(x,y,z)} L(x,y,z)|g(x,y,z)|\exp\{i[\gamma(x,y,z)+\alpha(x,y,z)]\}\Omega(x,y,z,\nu,\mu,\tau)\,dxdydz.$$

Если выполняется условие

$$[(x-\nu)^2+(y-\mu)^2]_{\text{макс}}/d^2=\varphi^2_{\text{макс}}<\sqrt{\frac{4\lambda}{\theta d}}, \tag{3}$$

здесь $\varphi_{\text{макс}}$ – наибольшая величина угла, значение его задается в радианах, под которым виден объект с расстояния d, θ – некоторый коэффициент, задающий наибольшую фазовую ошибку, величина которой равна π/θ, то интегральное соотношение Кирхгофа можно преобразовать в интеграл Френеля [1–2]:

$$F(\nu,\mu)=\int\limits_{(x,y)} g_1(x,y)\exp\{i\pi\lambda^{-1}d^{-1}[(x-\nu)^2+(y-\mu)^2]\}dxdy. \tag{4}$$

Соотношение (4) можно использовать для синтеза голограмм, которые так и называют – синтезированные голограммы Френеля.

Целью данной работы является рассмотрение процесса синтеза голограмм Френеля.

Дискретное представление голограммы Френеля

Рассмотрим дискретное представление голограммы Френеля:

$$F(\nu,\mu)=\int\limits_{(x,y)} g_1(x,y)\exp\{i\pi\lambda^{-1}d^{-1}[(x-\nu)^2+(y-\mu)^2]\}dxdy=$$

$$=\exp[i\pi(\lambda d)^{-1}(\nu^2+\mu^2)]\iint\limits_{(x,y)} g_1(x,y)\exp[i\pi(\lambda d)^{-1}(x^2+y^2)]\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(x\nu+y\mu)dxdy. \tag{5}$$

Для ограниченного объекта $(-X_{\text{макс}}, X_{\text{макс}}; -Y_{\text{макс}}, Y_{\text{макс}})$, знание точек отсчета функции $F(\nu,\mu)\exp[-i\pi(\lambda d)^{-1}(\nu^2+\mu^2)]$ позволяет полностью ее восстановить методом интерполяции:

$$F(\nu,\mu)\exp[-i\pi(\lambda d)^{-1}(\nu^2+\mu^2)]=\sum_r\sum_s F(r\Delta\nu,s\Delta\mu)\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda d}[(r\Delta\nu)^2+\right.$$

$$\left.+(s\Delta\mu)^2]\right\}\sin c\left[\frac{\pi}{\Delta\nu}(\nu-r\Delta\nu)\right]\sin c\left[\frac{\pi}{\Delta\mu}(\mu-r\Delta\mu)\right], \tag{6}$$

где

$$\Delta\nu=\lambda d/2X_{\text{макс}},\Delta\mu=\lambda d/2Y_{\text{макс}},$$

$$\Delta\xi=\lambda d/2X_{\text{макс}},\ \Delta\eta=\lambda d/2Y_{\text{макс}}. \tag{7}$$

То есть функция $F(\nu, \mu)$ полностью определена заданными точками отсчета [3–4]:

$$F(\nu,\mu)=\exp[i\pi(\lambda d)^{-1}(\nu^2+\mu^2)]\sum_r\sum_s F(r\Delta\nu,s\Delta\mu)\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda d}[(r\Delta\nu)^2+\right.$$

$$\left.+(s\Delta\mu)^2]\right\}\sin c\left[\frac{\pi}{\Delta\nu}(\nu-r\Delta\nu)\right]\sin c\left[\frac{\pi}{\Delta\mu}(\mu-r\Delta\mu)\right]. \tag{8}$$

Подбор фазы может быть может быть осуществлен, например, путем освещения голограммы

$$F(\nu,\mu)=\sum_r\sum_s F(r\Delta\nu,s\Delta\mu)\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda d}\left[(r\Delta\nu)^2+(s\Delta\mu)^2\right]\right\}\sin c\left[\frac{\pi}{\Delta\nu}(\nu-r\Delta\nu)\right]\sin c\left[\frac{\pi}{\Delta\mu}(\mu-r\Delta\mu)\right] \tag{9}$$

волновым фронтом сферического вида с соответствующим радиусом кривизны

$$F''(\nu,\mu)=\exp[i\pi(\lambda d)^{-1}(\nu^2+\mu^2)]. \tag{10}$$

Посмотрим теперь, как найти отсчеты $F(r\Delta\nu, s\Delta\mu)$. Из (5) получаем

$$F(r\Delta\nu, s\Delta\mu)\exp\{-i\frac{\pi}{\lambda d}[(r\Delta\nu)^2+(s\Delta\mu)^2]\} = \iint\limits_{(x,y)} g_1(x,y)\exp[i\pi(\lambda d)^{-1}(x^2+y^2)]\times$$
$$\times\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu + ys\Delta\mu)dxdy. \quad (11)$$

Объект можно описать зависимостью коэффициента отражения по интенсивности от координат точек поверхности $|g_1(x,y)|$. Точки дискретизации функции $|g_1(x,y)|$ позволяют, так как функция достаточно гладкая, полностью ее восстановить методами интерполяции с помощью некоторой функции $\beta(x, y)$ [5–7]:

$$|g_1(x,y)| = \sum_k\sum_i |g_1(k\Delta x, i\Delta y)|\beta(x-k\Delta x, y-i\Delta y)\,, \quad (12)$$

здесь Δx, Δy – шаги дискретизации вдоль координат x и y.

$$F(r\Delta\nu, s\Delta\mu)\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda d}[(r\Delta\nu)^2+(s\Delta\mu)^2]\right\} = \sum_k\sum_i |g_1(k\Delta x, i\Delta y)| \iint\limits_{(x,y)} \beta(x-k\Delta x, y-i\Delta y)\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}[\alpha_1(x,y)+(x^2+y^2)]\right\}\exp\left\{-\frac{2\pi}{\lambda d}[xr\Delta\nu + ys\Delta\mu]\right\}dxdy, \quad (13)$$

здесь $\alpha_1(x, y)$ – функция, пропорциональная фазовой составляющей отражающего коэффициента рассматриваемого объекта.

$$\alpha_1(x,y) = \frac{\lambda d}{\pi}\alpha(x,y). \quad (14)$$

Добавим взаимно уничтожающие друг друга фазовые множители в дискретизированном виде, как под знак суммы, так и под знак интеграла в (13)

$$F(r\Delta\nu, s\Delta\mu)\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda d}[(r\Delta\nu)^2+(s\Delta\mu)^2]\right\} = \sum_k\sum_i |g_1(k\Delta x, i\Delta y)|\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}[\alpha_1(k\Delta x, i\Delta y)+(k\Delta x)^2+(i\Delta y)^2]\right\}\int\limits_{-X_{\text{макс}}}^{X_{\text{макс}}}\int\limits_{-Y_{\text{макс}}}^{Y_{\text{макс}}} \beta(x-k\Delta x, y-i\Delta y)\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}[\alpha_1(x,y)-\alpha_1(k\Delta x, i\Delta y)]\right\}\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}[x^2-(k\Delta x)^2+y^2-(i\Delta y)^2]\right\}\times$$
$$\times\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu + ys\Delta\mu)dxdy. \quad (15)$$

Введем дополнительные условия:

$$\alpha_1(x,y)-\alpha_1(k\Delta x, i\Delta y) < \lambda d,\ \ x^2-(k\Delta x)^2+y^2-(i\Delta y)^2 < \lambda d. \quad (16)$$

Указанные дополнительные условия показывают, что погрешность в описании профиля объекта и отклонение формы волнового фронта от сферической формы были пренебрежительно малы, и потому можно было записать [8–10]

$$\int\limits_{-X_{\text{макс}}}^{X_{\text{макс}}}\int\limits_{-Y_{\text{макс}}}^{Y_{\text{макс}}} \beta(x-k\Delta x, y-I\Delta y)\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}[\alpha_1(x,y)-\alpha_1(k\Delta x, i\Delta y)]\right\}\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}[x^2-(k\Delta x)^2+y^2-(i\Delta y)^2]\right\}\times$$
$$\times\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu + ys\Delta\mu)dxdy \cong \int\limits_{-X_{\text{макс}}}^{X_{\text{макс}}}\int\limits_{-Y_{\text{макс}}}^{Y_{\text{макс}}} \beta(x-k\Delta x, y-i\Delta y)\times$$
$$\times\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu + ys\Delta\mu)dxdy. \quad (17)$$

Интегральное соотношение в правой части (17) можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_{-X_{\text{макс}}}^{X_{\text{макс}}}\int\limits_{-Y_{\text{макс}}}^{Y_{\text{макс}}}\beta(x-k\Delta x, y-i\Delta y)\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu+ys\Delta\mu)dxdy =$$

$$=\left\{\int\limits_{-X_{\text{макс}}-k\Delta x}^{X_{\text{макс}}-k\Delta x}\int\limits_{-Y_{\text{макс}}i\Delta y}^{Y_{\text{макс}}i\Delta y}\beta(x,y)\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu+ys\Delta\mu)dxdy\right\}\times$$

$$\times\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(kr\Delta x\Delta\nu+is\Delta y\Delta\mu)], \tag{18}$$

$$\int\limits_{-X_{\text{макс}}-k\Delta x}^{X_{\text{макс}}-k\Delta x}\int\limits_{-Y_{\text{макс}}i\Delta y}^{Y_{\text{макс}}i\Delta y}\beta(x,y)\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu+ys\Delta\mu)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\beta(x,y)\times$$

$$\times\exp[-i2\pi(\lambda d)^{-1}(xr\Delta\nu+ys\Delta\mu)dxdy=B(r\Delta\nu,s\Delta\mu). \tag{19}$$

Сделав подстановку (18) и (19) в (15), получаем

$$F(r\Delta\nu,s\Delta\mu)\exp\{-i\frac{\pi}{\lambda d}[(r\Delta\nu)^2+(s\Delta\mu)^2]\}=\sum_k\sum_i\left|g_1(k\Delta x,i\Delta y)\right|\times$$

$$\times\exp[i2\pi(\lambda d)^{-1}(kr\Delta x\Delta\nu+is\Delta y\Delta\mu)]B(r\Delta\nu,s\Delta\mu). \tag{20}$$

Процесс суммирования по k и i в (20) осуществляется в пределах $[-X_{\text{макс}}/\Delta x,\ X_{\text{макс}}/\Delta x]$ и $[-Y_{\text{макс}}/\Delta y,\ Y_{\text{макс}}/\Delta y]$ соответственно.

$B(r\Delta\nu,s\Delta\mu)$ можно определить как маскирующую функцию, так как вне пределов некоторого интервала по ν и μ она обращается в нуль. В случае интерполяции объекта в соответствии с теоремой отсчетов

$$\beta(x,y)=\sin c\left(\frac{\pi}{\Delta x}x\right)\sin c\left(\frac{\pi}{\Delta y}y\right). \tag{21}$$

Откуда

$$B(r\Delta\nu,s\Delta\mu)=1;\left|\nu\right|<\lambda d/\Delta x,\left|\eta\right|<\lambda d/\Delta y. \tag{22}$$

Из (22) можно видеть, что наибольшие значения r и s, для которых вычисляется сумма, задаются соотношениями [11–13]

$$M_x=\frac{\lambda d}{\Delta\nu\Delta x},M_y=\frac{\lambda d}{\Delta\mu\Delta y}. \tag{23}$$

Согласно (7)

$$2X_{\text{макс}}/\Delta x=\lambda d/(\Delta\nu\Delta x),2Y_{\text{макс}}/\Delta y=\lambda d/(\Delta\mu\Delta y). \tag{24}$$

Таким образом, имеем

$$F(r,s)=\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}\left[(r\Delta\nu)^2+(s\Delta\mu)^2\right]\right\}\sum_k^{M_x-1}\sum_i^{M_y-1}g_1(k,i)\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda d}\left[k^2(\Delta x)^2+i^2(\Delta y)^2\right]\exp\left[-i2\pi\left(\frac{kr}{M_x}+\frac{is}{M_y}\right)\right.\right.. \tag{25}$$

С целью устранения в (25) размерных величин, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\nu^2&=(2X_{\text{макс}})^2/\lambda d=\lambda d(\Delta\nu)^2,\\ \varepsilon_\mu^2&=(2Y_{\text{макс}})^2/\lambda d=\lambda d(\Delta\mu)^2.\end{aligned} \tag{26}$$

Окончательно получаем

$$F(r,s)=\exp\left[i\pi\left(\frac{r^2}{\varepsilon_\nu^2}+\frac{s^2}{\varepsilon_\mu^2}\right)\right]\sum_k^{M_x-1}\sum_i^{M_y-1}g_1(k,i)\times\exp\left[i\pi\left(\frac{k^2\varepsilon_\nu^2}{M_x^2}+\frac{i^2\varepsilon_\mu^2}{M_y^2}\right)\right]\exp\left[-i2\pi\left(\frac{kr}{M_x}+\frac{is}{M_y}\right)\right]. \tag{27}$$

Соотношение (27) описывает дискретное преобразование Фурье. Вычисление такого преобразования требует помимо наличия матрицы $g_1(k, i)$, которая определяет распределение амплитуды света вблизи объекта, еще знание величин ε_ν и ε_μ, которые задаются условиями (26) и характеризуют относительные размеры объекта, наблюдаемого из произвольной точки плоскости регистрации голограммы [14–15].

Как видно из сказанного, расчет синтезированной голограммы Френеля сводится к определению матрицы $\{F(r, s)\}$ по матрице отсчетов объекта $g_1(k, i)$ и аналогового интерполирования полученных точек дискретизации в соответствии с (8)–(10).

Выводы

Трехмерная голография в самом общем случае описывается интегралом Кирхгофа. Расчет такого интеграла аналитически, даже в случае простейших объектов, задача достаточно сложная и чаще всего неразрешимая. Попытки решения интеграла численными методами приводят к алгоритмам, которые требуют огромного объема машинных ресурсов. Поэтому для расчета световых полей в так называемой средней зоне (зона Френеля) трехмерный интеграл Кирхгофа сводят к двумерному интегралу Френеля. В рассмотренной работе предлагается оптимальный метод такого перехода, позволяющий свести к минимуму возникающие при этом погрешности. Кроме того предложена схема дискретизации амплитудных и фазовых составляющих световой волны, что позволяет эффективно осуществлять дискретизацию интеграла Френеля. Также показано, что дискретное преобразование Френеля можно свести к дискретному преобразованию Фурье, что позволяет использовать алгоритмы быстрого преобразования Фурье при расчетах синтезированных голограмм Френеля.

Список литературы

1. Yaroslavsky L. Introduction to Digital Holography. V. 1. Bentham E-book Series@Digital Signal Processing in Experimental Research». 2009. DOI: 10.2174/97816080507961090101.

2. Исмаилов Д.А., Исманов Ю.Х., Жумалиев К.М., Аккозов А.Д. Голографическая память на основе синтезированных голограмм // Проблемы современной науки и образования. 2016. № 17 (59). С. 6–9.

3. Исманов Ю.Х., Джаманкызов Н.К., Тынышова Т.Д., Алымкулов С.А. Восстановление бесщелевой радужной голограммы когерентной волной // Материалы VII Международной конференции по фотонике и информационной оптике: сборник научных трудов. М.: НИЯУ МИФИ, 2018. С. 596–597.

4. Исманов Ю.Х., Тынышова Т.Д., Алымкулов С.А. Использование приближения Френеля для расчета распределения светового поля, прошедшего свозь решетку // Вестник КГУСТА им. Н. Исанова. 2017. № 3 (57). С. 171–178.

5. Nehmetallah G., Banerjee P.P. Applications of digital and analog holography in three-dimensional imaging. Advances in Optics and Photonics. 2012. Vol. 4. Issue 4. P. 472–553. DOI: 10.1364/AOP.4.000472.

6. Kim Myung-K. Applications of Digital Holography in Biomedical Microscopy. Journal of the Optical Society of Korea. 2010. Vol. 14. Issue 2. P. 77–89.

7. Picart P. and Leval J. General theoretical formulation of image formation in digital Fresnel holography. Journal of the Optical Society of America A. 2008. Vol. 25. Issue 7. P. 1744–1761. DOI: 10.1364/JOSAA.25.001744.

8. Xue K., Yun-Da Q. L., and Wang Q. Continuous-wave terahertz in-line digital holography. Optics Letters. 2012. Vol. 37. Issue 15. P. 3228–3230. DOI: 10.1364/OL.37.003228.

9. Cho Hyung-Jun, Kim Doo-Cheol, Yu Young-Hun, Shin Sanghoon, and Jung Wongi Tilt Aberration Compensation Using Interference Patterns in Digital Holography. Journal of the Optical Society of Korea. 2009. Vol. 13. Issue 4. P. 451–455.

10. Jiang Z., Veetil S. P., Cheng J., Cheng L., Wang L., and Zhu J. High-resolution digital holography with the aid of coherent diffraction imaging. Optics Express. 2015. Vol. 23. Issue 16. P. 20916–20925. DOI: 10.1364/OE.23.020916.

11. Wang Z., Jiang Z., Chen Y. Single-shot dual-wavelength phase reconstruction in off-axis digital holography with polarization-multiplexing transmission. Applied Optics. 2016. Vol. 55. Issue 22. P. 6072–6078. DOI: 10.1364/AO.55.006072.

12. Zhao J., Jiang H., Di J. Recording and reconstruction of a color holographic image by using digital lensless Fourier transform holography. Optics Express. 2008. Vol. 16. Issue 4. P. 2514–2519. DOI: 10.1364/OE.16.002514.

13. Feng P., Wen X., Lu R. Long-working-distance synthetic aperture Fresnel off-axis digital holography. Optics Express. 2009. Vol. 17. Issue 7. P. 5473–5480. DOI: 10.1364/OE.17.005473.

14. Ismanov Y., Maripov A. Holographic Talbot Interferometer // Holography 2000, Vienna. Proceedings of SPIE. 2000. V. 4149. P. 213–220. DOI: 10.1117/12.402479.

15. Maripov A., Ismanov Y., Omyrzakov K. Four-channel wide-range holographic interferometer. Proceedings of SPIE (Munich). 2003. V. 5144. P. 606–610. DOI: 10.1117/12.501342.