УДК 535.41:778.38

# ОСОБЕННОСТИ ЗАПИСИ ГОЛОГРАММ ФРЕНЕЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

### Исманов Ю.Х., Жумалиев К.М., Алымкулов С.А.

Институт физики им. академика Ж.Ж. Жээнбаева НАН Кыргызской Республики, Бишкек, e-mail: i yusupjan@mail.ru

Теоретически проанализирован процесс записи голограмм Френеля с использованием двух опорных пучков. Показано, что световая волна, несущая информацию об объекте, может быть рассмотрена как сумма двух волн: волна не испытавшая возмущений, а значит, ее можно использовать как опорную волну, и возмущенная объектом волна, которая несет информацию об объекте. Волна, несущая информацию об объекте – это классическая объектная волна, а невозмущения волна действует как вторая опорняя волна, соосная объектной волне, помимо основной, падающей под углом к объектной волне. Такой подход позволяет рассматривать записанную голограмму как сочетание двух голограмм – осевой (голограмма Габора) и внеосевой (голограмма Лейта). Кроме указанных голограмм, в плоскости записи формируется третья голограмма, представляющая собой изображение решетки. Появление этой решетки объектной волне. Пространственную частоту изображения зтой решетки можно варьировать, изменяя угол между двумя опорными волнами. При восстановлении голограммы указанная решетка действует на опорную волну как линза, или зонная пластинка Френеля. Учет невозмущенной составляющей объектной волны при записи голограмм приводит к возникновению дополнительных компонентов, описывающих новые функциональные свойства рассмотренной голограммы.

Ключевые слова: объектная волна, опорная волна, соосная опорная волна, метод Габора, голограмма Френеля

## FEATURES OF RECORDING OF FRENEL HOLOGRAMS OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS

### Ismanov Yu.Kh., Zhumaliev K.M., Alymkulov S.A.

Institute of Physics named after academician Z.Z. Zheenbaev of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, e-mail: i yusupjan@mail.ru

Theoretically analyzed the process of recording Fresnel holograms using two reference beams. It is shown that a light wave carrying information about an object can be considered as the sum of two waves: a wave that did not experience perturbations, which means it can be used as a reference wave, and a wave disturbed by an object that carries information about the object. The wave carrying information about the object is a classical object wave, and the unperturbed wave acts as a second reference wave, coaxial to the object wave, in addition to the main wave incident at an angle to the object wave. This approach allows us to consider the recorded hologram as a combination of two holograms – axial (Gabor hologram) and off-axis (Leith hologram). In addition to these holograms, a third hologram is formed in the recording plane, which is an image of the lattice. The appearance of this lattice is explained as the result of the interference addition of two reference waves – an inclined and coaxial object wave. The spatial frequency of the image of this lattice can be varied by changing the angle between the two reference waves. When the hologram is restored, the lattice acts on the reference wave as a lens or Fresnel zone plate. Taking into account the unperturbed component of the object wave when recording holograms leads to the appearance of additional components describing the new functional properties of the hologram under consideration.

Keywords: object wave, reference wave, coaxial reference wave, Gabor method, Fresnel hologram

Голография Френеля с точки зрения математики – это преобразования Френеля, которые обычно сводятся к двумерным преобразованиям. С точки зрения физики происходит преобразование координат точек одного плоского объекта к координатам другого плоского объекта [1-2]. При расчете распределений световых полей мы имеем дело с трехмерной задачей, которая, в общем случае, описывается интегралом Кирхгофа. Решение такой проблемы даже с использованием численных методов, не говоря уже об аналитическом подходе, задача очень сложная. Поэтому для случая зоны Френеля используют так называемое параксиальное приближение, в котором

предполагается, что размеры рассматриваемых объектов значительно меньше расстояний между ними. В этом случае трехмерная задача сводится к двумерной, для которой можно использовать аппарат преобразования Френеля.

Задача оценки амплитудных и фазовых распределений волны света, который отражается объемным объектом произвольного вида на заданную плоскость фиксации, является трехмерной, и решение ее представляет собой расчет трехмерных интегралов [3–5]. Расчет подобных интегралов – задача в вычислительном отношении очень сложная. Однако существуют естественные ограничения, которые дают возмож-

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНЫХ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ № 9, 2019 ность рассматривать трехмерный объект как двумерный. Поверхность объекта разбивается на элементы, каждый из которых можно приблизительно рассматривать как плоскость, а фазовые и амплитудные распределения по поверхности объекта замещаются распределением фаз и амплитуд на плоскости близкой к объекту.

При решении задач, целью которых является формирование изображений, важно уметь правильно передать распределение яркости и относительно крупные шероховатости объекта (т.е. отклонения от гладкости, значения которых сильно превышают длины волн освещающего источника) [6–8]. Указанные проблемы решаются определением распределения модуля отражающего коэффициента вдоль поверхности объекта, который при этом пересчитывается на плоскость, касающуюся объекта и расположенную нормально к линии рассматривания. Также необходимо задать геометрическую форму поверхности, используя которую можно сформировать распределение расстояний от каждой точки поверхности объекта до плоскости касания вдоль линии наблюдения [9–11].

#### Объемная голография Френеля с использованием двух опорных волн

На рис. 1 представлена схема записи голограмм на основе бесщелевого метода [12–13]. Схема является обобщенной, так как позволяет записывать по бесщелевому методу как отражающие, так и пропускающие объекты. На рис. 1 показано, что прошедшая сквозь объект или отраженная от него волна представляется, в соответствии с методом Габора, как сумма дифрагированной и недифрагированной составляющих.

Волны V<sub>1</sub> и V<sub>2</sub> освещают соответственно пропускающий и отражающий объекты.

Предложенная схема представляет собой совокупность двух схем записи голограмм: осевой метод Габора и внеосевой метод записи [14].

Рассмотрим подробнее метод Габора. В соответствии с этим методом пропускающий коэффициент прозрачного объекта  $\sigma(x, y)$  и волну U(x, y), которая проходит сквозь такой объект, можно рассматривать как одновременное действие двух волн:

$$\sigma(x_0, y_0) = \sigma_0 + \Delta \sigma(x_0, y_0), \qquad (1)$$

$$U(x, y) = U_0 + U_1(x, y) =$$

$$= c_0 \exp(-i\alpha_0) + c_1(x, y) \exp[-i\alpha_1(x, y)], \quad (2)$$

здесь  $\sigma_0$  и  $\Delta \sigma$  соответственно описывают недифрагированную и дифрагированную составляющие коэффициента пропускания;  $c_0$  – амплитуда недифрагированной составляющей волны (когерентный фон), соответствующая  $\sigma_0$ ;  $c_1(x, y)$  – амплитуда дифрагированной составляющей волны, соответствующая диффузной компоненте  $\Delta \sigma(x_0, y_0)$ ;  $\alpha_0$  и  $\alpha_1(x, y)$  – фазы этих волн.



Рис. 1. Запись голограмм пропускающих и отражающих объектов

Для записи голограммы используются три волны:  $R = A \exp(-i\gamma)$  – опорная волна;  $U_0 = c_0 \exp(-i\alpha_0)$  – невозмущенный фон (волна) (действует так же как и опорная волна, но соосная предметной);  $U_1(x, y) = c_1(x, y) \exp[-i\alpha_1(x, y)]$  – объектная волна. Здесь  $A, U_0, U_1$  – амплитуды,  $\gamma, \alpha_0, \alpha_1$  – фазы этих волн.  $\Gamma$  – регистрирующая среда (голограмма),  $\Pi$  – изображающая линза, O – исследуемый объект. Для условия «тени»

$$z_0 \le (1/5)\delta_{\min}^2 / \lambda, \tag{3}$$

здесь  $z_0$  – удаление объекта от плоскости голограммы,  $\delta_{\min}$  – размер наименьшей неоднородности объекта,  $\lambda$  – длина световой волны. Расчет распределения интенсивности световой волны рядом с голограммой

$$I(x,y) = \left| \operatorname{Re} xp(-i\lambda) + U_0 \exp[-i(\alpha_0 + \psi)] + U_1 \exp[-i(\alpha_1 + \psi)] \right|^2 = R^2 + U_0^2 + U_1^2 + 2U_0 U_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_0) + 2RU_1 \cos(\psi + \gamma - \alpha_1) + 2RU_0 \cos(\psi + \gamma - \alpha_0),$$
(4)

где  $\psi = 2\pi\beta x$ ,  $\beta = \sin\theta / \lambda$  – частота в пространственной области,  $\lambda$  – длина световой волны,  $R^2$  и  $U_0^2$  – энергетические характеристики опорного поля и невозмущенной компоненты объектного поля,  $U_1^2$  – световой оттиск записываемого объекта [15].

INTERNATIONAL JOURNAL OF APPLIED AND FUNDAMENTAL RESEARCH № 9, 2019 Введем новые переменные для описания распределения интенсивности световой волны I(x, y) рядом с плоскостью голограммы в следующем виде:

$$I(x, y) = q_0 + q_1 + q_2 + q_3,$$
(5)

где

$$q_{0} = R^{2} + U_{0}^{2} + U_{1}^{2},$$

$$q_{1} = K_{1} \{ \exp[-i(\alpha_{1} - \alpha_{0})] + \exp[i(\alpha_{1} - \alpha_{0})] \} = q_{0}^{-} + q_{0}^{+},$$

$$q_{2} = K_{2} \{ \exp[-i(\psi + \gamma - \alpha_{1})] + \exp[i(\psi + \gamma - \alpha_{1})] \} = q_{1}^{-} + q_{1}^{+},$$

$$q_{3} = K_{3} \{ \exp[-i(\psi + \gamma - \alpha_{0})] + \exp[i(\psi + \gamma - \alpha_{0})] \} = q_{2}^{-} + q_{2}^{+},$$

$$K_{1} = U_{0}U_{1}, K_{2} = RU_{1}, K_{3} = RU_{0}.$$
(6)

Подобная голограмма записывается в среде, осуществляющей фазовую модуляцию (например, галоидосеребряные фотографические слои и др.). Соответствующая обработка фотопластинки в линейном режиме приводит к тому, что пропускание такой голограммы можно выразить посредством экспоненциальных функций, т.е. пропускание является нелинейной функцией по отношению к интенсивности I(x, y) и его можно представить в виде произведения трех экспоненциальных сомножителей

$$\sigma(x, y) = \exp[iI(x, y)] = \exp(iq_1)\exp(iq_2)\exp(iq_3).$$
(7)

Как было сказано ранее, если такую голограмму осветить волной, которая совпадает с исходной опорной волной R(k), то за голограммой формируются три световых пучка, соответствующие 0 и ±1 порядкам дифракции (рис. 2).



Рис. 2. Восстановление голограммы

$$U = R\sigma(x, y) = U_0 + U_{+1} + U_{-1}.$$
(8)

Представим выражения для интенсивностей волны в 0 и  $\pm 1$  порядках дифракции после голограммы в следующем виде:

$$I_0 \approx R^2 [1 - 0, 5(q_3^+ q_2^- + q_3^- q_2^+) + 0, 25(q_1^+ q_2^- + q_1^- q_2^+ + q_1^+ q_1^+ + q_1^- q_1^-)], \tag{9}$$

$$I_{+1} = 0,25R^2(q_3^+q_3^- + q_2^+q_2^- + q_3^+q_2^- + q_3^-q_2^+),$$
(10)

$$I_{-1} = 0,25R^{2}[(q_{3}^{-}q_{3}^{+} + q_{2}^{-}q_{2}^{+}) + (q_{3}^{+}q_{2}^{-} + q_{3}^{-}q_{2}^{+})].$$
(11)

Если голограмму освещать когерентным светом, то в выражениях 9-11 каждая из компонент имеет следующий смысл:  $q_1^+ q_2^-$  и  $q_1^- q_2^+$  – показывают, что в нулевом порядке присутствуют два изображения действительное и мнимое;  $q_{2}^{+}q_{2}^{-}$  и  $q_{2}^{-}q_{2}^{+}$  – в +1 порядке присутствует действительное изображение, а в -1 порядке - мнимое изображение;  $q_3^+q_2^-$  и  $q_3^-q_2^+$  – проекции действительных и мнимых изображений во всех трех порядках дифракции;  $q_3^-q_3^+$  – невозмущенный фон. Также в (9) присутствуют слагаемые  $q_1^+q_1^+$  и  $q_1^-q_1^-$ , которые описывают искаженные действительное и мнимое изображения, фазовые множители которых удвоены. При использовании белого света для восстановления, вышерассмотренные компоненты описывают:  $q_3^+ q_3^-$  – световой спектр, возникающий из-за действия голографической решетки;  $q_2^+q_2^-$  – изображения объекта в действительной и мнимой областях, имеющие радужную окраску;  $q_3^{-}q_2^{-}$  и  $q_{3}^{-}q_{2}^{+}$  – сфокусированные изображения исходного объекта.

#### Выводы

Предложена многолучевая модель записи голограмм Френеля для объемных объектов. С этой целью разработан способ перехода от трехмерного объекта к двумерному. В основе метода лежат принципы геометрической оптики, позволяющие произвести пересчет характеристик трехмерного объекта на плоскость, расположенную как можно ближе к объекту. Таким образом трехмерная задача расчета световых полей вблизи плоскости голограммы сводится к двумерной, что позволяет воспользоваться преобразованиями Френеля при расчетах.

Показано, что световая волна от объекта может быть рассмотрена как сумма двух волн: волна не испытавшая возмущений, а значит, ее можно использовать как опорную волну, и возмущенная объектом волна, которая несет информацию об объекте. Волна от объекта – это классическая объектная волна, а невозмущенная составляющая действует как вторая опорная волна, соосная объектной волне, помимо основной, падающей под углом к объектной волне. Такой подход позволяет рассматривать записанную голограмму как сочетание двух голограмм – осевой (голограмма Габора) и внеосевой (голограмма Лейта). Учет невозмущенной составляющей объектной волны при записи голограмм приводит к возникновению дополнительных компонентов, описывающих новые функциональные свойства рассмотренной голограммы.

#### Список литературы

1. Yaroslavsky L., Astola J. Introduction to Digital Holography. V. 1. Bentham E-book Series: Digital Signal Processing in Experimental R esearch». 2009. DOI: 10.2174/97816080507961090101.

2. Исманов Ю.Х. Интерферометрия на основе метода бесщелевой радужной голографии // Вестник КГУСТА. 2015. № 4 (40). С. 194–198.

 Исманов Ю.Х., Джаманкызов Н.К., Тынышова Т.Д., Алымкулов С.А. Восстановление бесщелевой радужной голограммы когерентной волной // Материалы VII Международной конференции по фотонике и информационной оптике: сборник научных трудов. М.: НИЯУ МИФИ, 2018. С. 596–597.

4. Исманов Ю.Х., Тынышова Т.Д., Алымкулов С.А. Использование приближения Френеля для расчета распределения светового поля, прошедшего свозь решетку // Вестник КГУСТА им. Н. Исанова. 2017. № 3 (57). С. 171–178.

5. Nehmetallah G., Banerjee P.P. Applications of digital and analog holography in three-dimensional imaging. Advances in Optics and Photonics. 2012. Vol. 4. Issue 4. P. 472–553. DOI: 10.1364/AOP.4.000472.

6. Kim Myung-K. Applications of Digital Holography in Biomedical Microscopy. Journal of the Optical Society of Korea. 2010. Vol. 14. Issue 2. P. 77–89.

7. Picart P., Leval J. General theoretical formulation of image formation in digital Fresnel holography. Journal of the Optical Society of America A. 2008. Vol. 25. Issue 7. P. 1744–1761. DOI: 10.1364/JOSAA.25.001744.

8. Xue K., Yun-Da Q.L., Wang Q. Continuous-wave terahertz in-line digital holography. Optics Letters. 2012. Vol. 37. Issue 15. P. 3228–3230. DOI: 10.1364/OL.37.003228.

9. Cho Hyung-Jun, Kim Doo-Cheol, Yu Young-Hun, Shin Sanghoon, and Jung Wongi Tilt Aberration Compensation Using Interference Patterns in Digital Holography. Journal of the Optical Society of Korea. 2009. Vol. 13. Issue 4. P. 451–455.

10. Jiang Z., Veetil S.P., Cheng J., Cheng L., Wang L., Zhu J. High-resolution digital holography with the aid of coherent diffraction imaging. Optics Express. 2015. Vol. 23. Issue 16. P. 20916–20925. DOI: 10.1364/OE.23.020916.

11. Wang Z., Jiang Z., Chen Y. Single-shot dual-wavelength phase reconstruction in off-axis digital holography with polarization-multiplexing transmission. Applied Optics. 2016. Vol. 55. Issue 22. P. 6072–6078. DOI: 10.1364/AO.55.006072.

12. Ismanov Y., Maripov A. Holographic Talbot Interferometer. Holography 2000, Vienna. Proceedings of SPIE. 2000. V. 4149. P. 213–220. DOI: 10.1117/12.402479.

13. Maripov A., Ismanov Y., Omyrzakov K. Four-channel wide-range holographic interferometer. Proceedings of SPIE (Munich). 2003. V. 5144. P. 606–610. DOI: 10.1117/12.501342.

14. Zhao J., Jiang H., Di J. Recording and reconstruction of a color holographic image by using digital lensless Fourier transform holography. Optics Express. 2008. Vol. 16. Issue 4. P. 2514–2519. DOI: 10.1364/OE.16.002514.

15. Feng P., Wen X., Lu R. Long-working-distance synthetic aperture Fresnel off-axis digital holography. Optics Express. 2009. Vol. 17. Issue 7. P. 5473–5480. DOI: 10.1364/ OE.17.005473.