СТАТЬИ

УДК 532.5:517.23

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ковалев М.Д.

Московский городской педагогический университет, Москва, e-mail: kovalev7079@gmail.com

Во многих случаях течения жидкостей (и газов) их плотность можно считать неизменяющейся, то есть постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения. Другими словами, в этих случаях при движении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. О таком движении говорят как о движении несжимаемой жидкости. Для решения практических задач, связанных с моделированием осаждения частиц в несжимаемой жидкости и с моделированием движения пузырьков, требуется выявление зависимости гидродинамической силы от параметров движения (скорости, ускорения и др.). Сами частицы, как правило, по форме близки к сферическим, поэтому для решения задач требуется определить зависимость гидродинамической силы, действующей на сферу, движущуюся в жидкости, от параметров ее движения. Данные вопросы особенно актуальны в настоящее время в связи с созданием новых дисперсных материалов на основе вязкой жидкости. Примерами таких материалов являются коллоидные кристаллы, составные эмульсии и наножидкости. В таких системах частицы обладают наперед заданными свойствами, что позволяет моделировать изменение данных сред при различных внешних воздействиях. Помимо этого, данная модель представляет интерес при расчете движения взвешенных примесей в жидких средах (например, в атмосфере и океанах). В данной работе будет представлен новый подход к исследованию этой модели, который позволяет устранить недостатки полученных ранее для нее решений.

Ключевые слова: несжимаемая вязкая жидкость, нестационарное движение, гидродинамическая сила, сила Бассе, дробные производные, метод возмущений

INVESTIGATION OF BODY MOTION IN AN INCOMPRESSIBLE FLUID USING FRACTIONAL ORDER DERIVATIVES

Kovalev M.D.

Moscow City Pedagogical University, Moscow, e-mail: kovalev7079@gmail.com

In many cases the flow of liquids (and gases), their density can be considered unaltered, i.e. constant along the entire fluid volume during the entire time of movement. In other words, in these cases there is not perceptible compression or expansion of the fluid during movement. Such movement is said to be the movement of an incompressible liquid. For solving practical problems related to modeling the deposition of particles in an incompressible liquid and with modeling the movement of bubbles it is necessary to identify the dependence of hydrodynamic force on the motion parameters (speed, acceleration, etc.). The particles are usually close to spherical shape, so to solve the problems it is necessary to determine the dependence of hydrodynamic force acting on the sphere that moves in a liquid from the parameters of its motion. These issues are particularly relevant nowadays in connection with the creation of new dispersed materials based on viscous liquids. Examples of such materials are colloidal crystals, composite emulsions and nanofluids. In these systems, the particles have predefined properties, which allows to model changes in these environments at different external influences. In addition, this model is also interesting in the calculation of suspended solids movement in fluid media (e.g., atmosphere and oceans). This article will introduce a new approach to the study of this model, which allows to eliminate the shortcomings of the solutions previously obtained for it.

Keywords: incompressible viscous liquid, nonstationary motion, hydrodynamic force, Basset force, fractional derivatives, perturbation method

Известно, что на твердую сферическую частицу, движущуюся с переменной скоростью t в вязкой жидкости, действует сила, зависящая от предыстории движения. Британскому математику Альфреду Бассе удалось построить интегрально-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет скорость $V(t)$ осаждения частицы.

При построении решения данного уравнения приходится рассматривать различные случаи, возникающие из-за различных значений плотностей жидкостей и порядков дробных производных, входящих в уравнение. Более того, решение для каждого отдельного случая представляет существенную сложность и не является удобным в применении. Это заметно по решениям, представленным в [1] и [2].

Ввиду этого возникает необходимость поиска другого подхода к поиску решения задачи. Целью данной работы является построение асимптотического ряда решения уравнения, справедливого для любых значений плотностей жидкостей и порядков дробной производной $0 < \alpha < 1$, а также сравнение полученного результата с известным точным решением.

Перед формулировкой задачи отметим, что для частных производных порядка $0 < \alpha < 1$ при нулевом начальном условии дробные производные по Капуто и Риману – Лиувиллю являются эквивалентными, то есть при $y(a) = 0$ и $0 < \alpha < 1$ выполняется равенство $\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x)$ [2, с. 92–93].

В рамках рассматриваемой задачи справедливы обозначенные выше условия. Поэтому при ее решении, не оговаривая дополнительно, будем подразумевать справедливость перехода от дробной производной Капуто к дробной производной по Риману – Лиувиллю.

Постановка задачи и составление модели

Рассмотрим нестационарное движение сферы, погруженной в несжимаемую вязкую жидкость, под действием гравитации. Ограничиваясь линеаризованной теорией, предполагают, что гидродинамическая наследственная сила обобщается в классическую силу Бассе по параметру $0 < \alpha < 1$. При этом, вводя в рассмотрение дробные производные, можно выразить силу Бассе через производную порядка 1/2 от скорости частицы.

Уравнение движения сферической частицы под действием силы тяжести в вязкой жидкости выражается через скалярную скорость $V(t)$, действующую в вертикальном направлении (предполагается, что она будет положительной, если направлена вниз) по формуле [1, с. 836]

$$m\frac{dV}{dt} = F_H + mg, \tag{1}$$

где $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_p$ – масса частицы плотности ρ_p и радиуса R, g – ускорение свободного падения, F_H – результирующая гидродинамических сил.

Если начальным состоянием частицы является состояние покоя в неподвижной жидкости с плотностью ρ_f и кинематической вязкостью ν, то справедлива следующая формула [1, с. 836]

$$F_H = -\frac{2}{3}\pi R^3\rho_f\frac{dV}{dt} - \frac{4}{3}\pi R^3\rho_f g + F_S + F_B,$$

где

$$F_S = -6\pi R^3\rho_f T_n^{-1}V(t), F_B = -6\pi R^3\rho_f T_n^{(\alpha-1)}\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}V(t), T_n = \frac{R^2}{\nu}.$$

Записи F_S и F_B означают силы Стокса и Бассе соответственно, а выражение

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}V(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{dV/d\tau}{(t-\tau)^\alpha}d\tau$$

означает дробную производную $D^{\alpha}_{0+}V$ по Риману – Лиувиллю порядка $0 < \alpha < 1$ [2, с. 71].

После подстановки составляющих результирующей гидродинамических сил и преобразований, учитывая начальное состояние покоя, уравнение (1) приводится к виду [1, с. 837; 2, с. 435]:

$$\frac{dV^*}{dt^*} + V^* + \delta^\alpha\frac{d^\alpha V^*}{dt^{*\alpha}} = 1, V^*\left(0^+\right) = 0, \tag{2}$$

где V^* и t^* – безразмерные параметры скорости и времени, которые связаны с размерными переменными соотношениями

$$V_S = \frac{2T_n g}{9}(\rho - 1),\ V^* = \frac{V}{V_S},\ t^* = \frac{t}{\sigma},\ \sigma = \frac{T_n}{\delta},\ \rho = \frac{\rho_p}{\rho_f},\ \delta = \frac{9}{2\rho + 1}. \tag{3}$$

Решение модели

Для решения классического случая, рассмотренного Бассе, достаточно положить в (2) $\alpha = 1/2$ и решить задачу Коши с учетом начального условия. Однако, следуя обозначенной цели, решим задачу в общем случае методом возмущений для малого положительного параметра $\delta^\alpha = \varepsilon \in \mathbb{R}$. Символ «$*$» в уравнении (2) для удобства будем опускать. Таким образом, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} V'(t) + \varepsilon\left(D_{0+}^{\alpha} V\right)(t) + V(t) = 1; (\varepsilon > 0,\ t > 0) \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение первого уравнения в (4) будем искать в виде ряда по степеням ε, то есть

$$V(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot V_k(t) = V_0(t) + \varepsilon V_1(t) + \varepsilon^2 V_2(t) + \cdots.$$

Подставляя это разложение в (4), получим

$$\frac{d}{dt}V_0(t) + \varepsilon \frac{d}{dt}V_1(t) + \varepsilon^2 \frac{d}{dt}V_2(t) + \cdots + \varepsilon\left[\left(D_{0+}^{\alpha}V_0\right)(t) + \varepsilon\left(D_{0+}^{\alpha}V_1\right)(t) + \varepsilon^2\left(D_{0+}^{\alpha}V_1\right)(t) + \cdots\right] +$$

$$+ V_0(t) + \varepsilon V_1(t) + \varepsilon^2 V_2(t) + \cdots = 1. \quad (5)$$

При ε = 0 решением уравнения является функция $V_0(t) = 1 - e^{-t}$. Подставляя найденную функцию в (5) и приравнивая коэффициенты при первой степени ε, получим

$$\frac{d}{dt}V_1(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{1 - e^{-r}dr}{(t-r)^{\alpha}} + V_1(t) = 0. \quad (6)$$

Для решения последнего уравнения предварительно преобразуем интеграл в дробной производной. Для этого введем вспомогательную функцию $f(t)$, где

$$f(t) = \int_0^t \frac{1 - e^{-r}dr}{(t-r)^{\alpha}} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1-\alpha}}{k!(k+1-\alpha)}.$$

Обозначая дробную производную в (6) через $b(t)$, получим уравнение вида $\frac{d}{dt}V_1(t) + V_1(t) = -b(t)$. Решая его методом вариации произвольной постоянной, получим

$$V_1(t) = -e^{-t}\int_0^t b(\tau)e^{\tau}d\tau.$$

Производя обратную замену $b(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{df(t)}{dt}$, имеем

$$V_1(t) = -e^{-t}\int_0^t \frac{e^{\tau}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{df(\tau)}{d\tau}d\tau = -\frac{e^{-t}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[e^t f(t) - f(0) - \int_0^t f(\tau)e^{\tau}d\tau\right].$$

Вычисляя недостающие слагаемые в правой части полученного равенства, получаем, что $f(0) = 0$ и

$$\int_0^t f(\tau)e^{\tau}d\tau = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kt^{k+2-\alpha}}{k!(1-\alpha)(k+1-\alpha)(k+2-\alpha)}.$$

Тогда

$$V_1(t)=\frac{e^{-t}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}e^t+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1-\alpha}}{k!(k+1-\alpha)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kt^{k+2-\alpha}}{k!(1-\alpha)(k+1-\alpha)(k+2-\alpha)}\right].$$

После преобразований получим

$$V_1(t)=-\frac{e^{-t}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+2-\alpha}}{k!(k+1-\alpha)(k+2-\alpha)}\right]. \tag{7}$$

Аналогичным образом вычислим $V_2(t)$. Приравнивая коэффициенты при второй степени ε, получим уравнение

$$\frac{d}{dt}V_2(t)+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{1-e^{-r}dr}{(t-r)^{\alpha}}+V_2(t)=0,$$

решение которого, очевидно, представимо в виде

$$V_2(t)=-\frac{e^{-t}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[e^t f_2(t)-f_2(0)-\int_0^t f_2(\tau)e^{\tau}d\tau\right]. \tag{8}$$

Находя слагаемые в правой части (8), получим следующие равенства

$$f_2(t)=-\frac{e^{-t}\cdot t^{3-2\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{B}(m-\alpha+1,k+3-\alpha)}{k!(k+1-\alpha)(k+2-\alpha)}\cdot\frac{t^{k+m}}{m!},$$

$$\int_0^t f_2(\tau)e^{\tau}d\tau=-\frac{t^{4-2\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{B}(m-\alpha+1,k-\alpha+3)}{k!(k+1-\alpha)(k+2-\alpha)}\cdot\frac{t^{k+m}}{m!(k+m-2\alpha+4)},$$

где $B(x, y)$ – бета-функция Эйлера.

Подставляя данные выражения в (8), учитывая $f_2(0) = 0$ и выполняя элементарные преобразования, получим равенство

$$V_2(t)=\frac{e^{-t}t^3}{\Gamma^2(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{k+m-2\alpha}\cdot\mathrm{B}(m-\alpha+1,k-\alpha+3)}{k!\cdot m!\cdot(k+1-\alpha)(k+2-\alpha)}\left(1-\frac{t}{k+m-2\alpha+4}\right). \tag{9}$$

Таким образом, получаем

$$V(t,\varepsilon)=1-e^{-t}+\varepsilon V_1(t)+\varepsilon^2V_2(t)+O(\varepsilon^3), \tag{10}$$

где $V_1(t)$ и $V_2(t)$ определены равенствами (7) и (9) соответственно.

Тогда асимптотический ряд для случая α = 1/2 будет иметь вид

$$V(t,\varepsilon)=1-e^{-t}-\varepsilon\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+\frac{3}{2}}}{k!\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)}\right]-$$

$$-\varepsilon^2\frac{e^{-t}t^3}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{k+m-1}\cdot\mathrm{B}(m+1/2,k+5/2)}{k!\cdot m!\cdot(k+1/2)(k+3/2)}\left(1-\frac{t}{k+m+3}\right)\right]+O(\varepsilon^3). \tag{11}$$

Для практических расчетов в равенствах (10) и (11) надо положить $V = V^*$ и $t = t^*$, которые определяются формулами (3).

Сравнение с точным решением

Сравним полученный нами результат с точным решением дифференциального уравнения в (4) при α = 1/2, которое представлено в [2, с. 298]:

$$V(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-(t-r)\right)^k}{k!} {}_1\psi_1 \left[\begin{matrix} (k+1,1) \\ (k+1,1/2) \end{matrix} \middle| (-\varepsilon(t-r)^{\frac{1}{2}}) \right] f(r)dr,$$

где ${}_p\psi_q(t)$ – обобщенная функция Райта, определенная, например, в [2, с. 56]. В нашем случае она имеет вид

$${}_1\psi_1 \left[\begin{matrix} (k+1,1) \\ (k+1,1/2) \end{matrix} \middle| (-\varepsilon(t-r)^{\frac{1}{2}}) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+1\cdot m)}{\Gamma(k+1+1/2\cdot m)} \frac{(-\varepsilon(t-r)^{\frac{1}{2}})}{m!}.$$

Тогда, учитывая $f(r) = 1$, получим

$$V(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \Gamma(k+m+1) \cdot \varepsilon^m \cdot (t-r)^{k+\frac{m}{2}} dr}{\Gamma\left(k+\frac{m}{2}+1\right) \cdot k! \cdot m!}$$

или

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \Gamma(k+m+1) \cdot \varepsilon^m \cdot t^{k+\frac{m}{2}+1}}{\Gamma\left(k+\frac{m}{2}+1\right) \cdot \left(k+\frac{m}{2}+1\right) \cdot k! \cdot m!}. \quad (12)$$

Сравнение точного решения с асимптотическим рядом при α = 1/2

t	Точное решение (12)	$1 - e^{-t}$	$1 - e^{-t} + \varepsilon V_1(t)$	$1 - e^{-t} + \varepsilon V_1(t) + \varepsilon^2 V_2(t)$
1	**0,495417**	0,632120	0,458847	**0,504832**
2	**0,677900**	0,864664	0,625311	**0,692978**
3	**0,764828**	0,950212	0,719846	**0,775856**
4	**0,812661**	0,981684	0,780815	**0,817446**
5	**0,842017**	0,993262	0,821212	**0,842268**
6	**0,861646**	0,997521	0,848403	**0,859556**

Полагая ε = 0,5, получим следующие результаты (для вычисления значения $V(t)$ воспользуемся базой Wolfram Alpha) (таблица).

Из таблицы видно, что увеличение числа приближений, как и ожидалось, дает более точные значения. Второе приближение даже при ε = 0,5 дает вполне удовлетворительные результаты. При уменьшении значения ε точность полученного решения возрастает.

При изменении порядка дробной производной в асимптотическом ряде (10) (ε = 0,5) наблюдается следующая зависимость (рисунок).

Из графика видно, что порядок дробной производной оказывает существенное влияние на скорость частицы, то есть эффекты вязкости подобны аномальным диффузионным явлениям, которые описываются дробными производными.

Заключение

Построенное нами асимптотическое решение справедливо для любых значений плотностей жидкостей и порядков дробной производной 0 < α < 1. Удовлетворительное совпадение результатов точного и приближенного решений позволяет использовать полученную формулу для практических расчетов. На основании этого можно утверждать, что цель работы была достигнута.

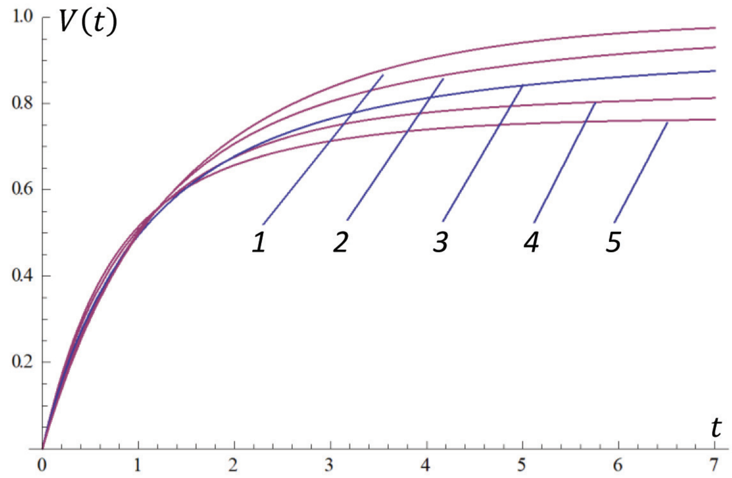

График зависимости V(t) от безразмерного параметра t при различных значениях порядка дробной производной: 1. α = 0,1, 2. α = 0,3, 3. α = 0,5, 4. α = 0,7, 5. α = 0,9

С практической важностью рассмотренной темы, анализом литературных данных и экспериментальными результатами можно ознакомиться в работах [3–6], а в работе [7] для численного моделирования нестационарных течений проводится верификация метода вязких вихревых доменов.

Автор выражает благодарность научному руководителю департамента математики и физики МГПУ В.А. Чугунову за ценные советы при написании текущей работы.

Список литературы

1. Mainardi F., Pironi P., Tampieri F. On a generalization of the Basset problem via fractional calculus. CANCAM 95. 1995. Vol. II. P. 836–837.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006. Сер. 204 North-Holland Mathematics studies. 523 p.

3. Водопьянов И.С., Петров А.Г., Шундерюк М.М. О нестационарном осаждении сферической твердой частицы в вязкой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2010. № 2. С. 97–106.

4. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. Экспериментальное исследование нестационарных режимов всплытия одиночного пузырька // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86. № 5. С. 1097–1106.

5. Архипов В.А. Физико-химические основы процессов тепломассообмена: учебное пособие. Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2011. 195 с.

6. Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // Вестник Югорского государственного университета. 2013. Вып. 2 (29). С. 46–50.

7. Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я., Андронов П.Р. Отчет № 5053 о научно-исследовательской работе по теме НИР: Нестационарные взаимодействия сплошных и проницаемых тел с вихревыми течениями жидкости и газа // Государственное учебно-научное учреждение НИИ механики МГУ им М.В. Ломоносова. 2010. 73 с.