

СТАТЬИ

УДК 517.977.58

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ**Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы.***Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова,
Бишкек, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru*

В данной работе на основе методов разделения движений и проблемы моментов предложен алгоритм построения равномерных нулевых асимптотических приближений к оптимальному управлению, приводящему к нахождению приближенного оптимального решения линейной сингулярно-возмущенной задачи оптимального управления с минимальной энергией. Эквивалентная система, полученная при полном разделении переменных состояний линейной стационарной сингулярно-возмущенной управляемой системы, обладает всеми свойствами исходной системы. Она состоит из двух подсистем низкого порядка, решения которых находятся независимо, причем они связаны только управляющей функцией. Полученная оптимальная траектория задачи удовлетворяет всем граничным условиям и состоит из трех составляющих, первое из которых формирует магистраль, остальные осуществляют переходы от начального состояния на магистраль и с магистрали на конечное состояние. Термин «магистраль» употребляемый в математической экономике может служить синонимом нулевого члена регулярного ряда для быстрой переменной составляющей. Поправка к первому приближению не представляет трудности, то есть все изложенные процедуры для рассматриваемой системы аналогично повторяются для высших приближений. Предлагаемый подход сочетает в себе приемы асимптотических и приближенных методов анализа. Совместное использование методов разделения движений и проблемы моментов позволяет обходить трудности, связанные при применении Принципа максимума с недостаточными краевыми условиями. В работе рассмотрен численный пример подтверждающий теоретические выводы.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные системы, быстрые и медленные переменные, асимптотические приближения, оптимальная траектория, оптимальное управление с минимальной энергией, магистраль

ASYMPTOTIC SOLUTION OF A SINGULAR-PERTURBED PROBLEM OF OPTIMAL MANAGEMENT WITH MINIMUM ENERGY**Imanaliev Z.K., Ashirbaev B.Y.***Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakova, Bishkek, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru*

In this paper, based on the methods of separation of motions and the problem of moments, we propose an algorithm for constructing uniform zero asymptotic approximations to optimal control, which leads to finding an approximate optimal solution to a linear singularly perturbed optimal control problem with minimum energy. An equivalent system obtained by completely separating the variable states of a linear stationary singularly perturbed controlled system has all the properties of the original system. It consists of two subsystems of low order, the solutions of which are found independently, and they are connected only by the control function. The obtained optimal trajectory of the problem satisfies all boundary conditions and consists of three components, the first of which forms the trunk, the rest make transitions from the initial state to the highway and from the highway to the final state. The term «highway» used in mathematical economics can serve as a synonym for the zero term of a regular series for a fast variable component. The correction to the first approximation is not difficult, that is, all the above procedures for the system under consideration are similarly repeated for higher approximations. The proposed approach combines the techniques of asymptotic and approximate methods of analysis. The joint use of methods of separation of movements and the problem of moments allows you to bypass the difficulties associated with the application of the Maximum Principle with insufficient boundary conditions. The paper considers a numerical example confirming the theoretical conclusions.

Keywords: singularly perturbed systems, fast and slow variables, asymptotic approximations, optimal trajectory, optimal control with minimal energy, highway

Теория и применение сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений в настоящее время активно развивается и применяется для решения широкого круга задач в различных отраслях науки. Такие системы появляются естественным образом в процессе моделирования и исследования объектов различной природы, способных одновременно совершать быстрые и медленные движения.

В сингулярно-возмущенных задачах эти системы являются жесткими и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Поэтому возрастает роль асимптотических методов, тем более, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи оптимального управления на задачи меньшей размерности.

Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами [1]. Следует отметить, что нахождение допустимого управления с использованием метода разделения движений относится к перспективным методам оптимального управления [2–4]. Задача разделения движений сингулярно-возмущенной управляемой системы были предметом исследования и в наших работах [5, 6].

Данная работа посвящена построению асимптотических приближений к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно-возмущенной системе. Эта задача состоит в нахождении допустимого управления с минимальными энергетическими затратами [7, 8] и построении оптимальной траектории обладающей магистральными свойствами [9]. Такие исследования начаты относительно давно, но сохраняют свою актуальность по настоящее время, о чем свидетельствуют новейшие работы, на эту тему в различной постановке [10–12].

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается сингулярно-возмущенной системой вида

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} x & z \end{pmatrix}, A = A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\mu} A_3 & \frac{1}{\mu} A_4 \end{pmatrix},$$

$$B = B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\mu} B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 - (n \times n), A_2 - (n \times m),$$

$A_3 - (m \times n), A_4 - (m \times m), B_1 - (n \times r), B_2 - (m \times r)$ – постоянные матрицы, $x \in R^n, z \in R^m, u \in R^r, t \in [t_0, t_1], 0 < \mu \ll 1$ – малый параметр, штрих обозначает транспонирование.

Рассмотрим задачу перевода объекта (1) из некоторого состояния

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

в состояние

$$y(t_1) = y_1, \quad (3)$$

при этом функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} u'(t, \mu) u(t, \mu) dt \quad (4)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Предполагается, что система (1) вполне управляема. Функционал (4) можно рассматривать как квадрат нормы функции $u(t)$ в пространстве $L_2[t_0, t_1]$. Так как норма $\|u\|$ достигает минимума со своим квадратом в $L_2[t_0, t_1]$, то необходимо выбрать среди допустимых решений задачи программного управления (задача о переводе системы (1) из заданной начальной точки (2) в конечную точку (3)) такое решение, которое имеет минимальную норму в $L_2[t_0, t_1]$ [13].

Такое решение (с минимальной нормой) существует, если компоненты импульсной переходной вектор-функции линейно независимы и это условие выполняется, если заданная система вполне управляема [13]. По предположению система (1) вполне управляема.

Предположим также, что корни характеристического уравнения матрицы A_4 удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \gamma_i < 0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (5)$$

В управляемых системах функционал (4) используется как критерий минимума затрат энергии на управление [13]. Поэтому данную задачу с минимальной нормой, иначе назовем задачей с минимальной энергией.

При выполнении условий (5), как показано в [2] систему (1) можно заменить эквивалентной системой, у которой разделены медленные $x(t)$ и быстрые $z(t)$ составляющие вектора состояния:

$$\dot{\tilde{x}}(t, \mu) = \tilde{A}_1 \tilde{x}(t, \mu) + \tilde{B}_1 u(t, \mu), \quad (6)$$

$$\mu \dot{\tilde{z}}(t, \mu) = \tilde{A}_4 \tilde{z}(t, \mu) + \tilde{B}_2 u(t, \mu)$$

где

$$\tilde{x} = x + \mu N \tilde{z}, \quad \tilde{z} = z - Hx, \quad (7)$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1(\mu) = A_1 + A_2 H, \quad \tilde{A}_4 = \tilde{A}_4(\mu) = A_4 - H A_2,$$

$$\tilde{B}_1 = \tilde{B}_1(\mu) = B_1 + N \tilde{B}_2, \quad \tilde{B}_2 = \tilde{B}_2(\mu) = B_2 - H B_1.$$

Матрицы $H = H(\mu)$ и $N = N(\mu)$ определяются из уравнения:

$$\mu H (A_1 + A_2 H) = A_3 + A_4 H, \quad (8)$$

$$\mu (A_1 N + A_2 H N + N H A_2) = A_2 + N A_4,$$

Граничные условия системы (6) определяются соотношениями:

$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \tilde{x}(t_1) = \tilde{x}_1, \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}_1, \quad (9)$$

где

$$\tilde{x}_0 = x_0 + N \tilde{z}_0, \tilde{x}_1 = x_1 + N \tilde{z}_1,$$

$$\tilde{z}_0 = z_0 - H x_0, \tilde{z}_1 = z_1 - H x_1.$$

Теперь сформулируем задачу об управлении с минимальной энергией для системы (6) следующим образом: требуется найти управление $u^* = u^*(t, \mu)$ среди всех допустимых управлений доставляющие минимум функционалу (4) при ограничениях (6), (7).

При $\mu = 0$ из (1) получаем

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_0 \bar{x}(t) + B_0 \bar{u}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \bar{x}(t_1) = \bar{x}_1, \quad (10)$$

$$\bar{z}(t) = -A_4^{-1} A_3 \bar{x}(t) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t),$$

где $A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$, $B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2$.

Задача (4), (10) является предельной к задаче (1)–(4). Поведение системы (1) или (6) в окрестности граничных точек существенно отличается от поведения системы (10). Поэтому рассмотрим систему

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_0 \bar{x}(t) + B_0 \bar{u}(t), \quad (11)$$

$$\mu \dot{\bar{z}}(t, \mu) = A_4 \bar{z}(t, \mu) + B_2 u(t, \mu).$$

Система (11) аппроксимирует систему (1) с точностью порядка μ , т.е. она является асимптотической с точностью $O(\mu)$ и получается из (6) при следующих приближениях:

$$H(\mu) \approx H_0 = A_4^{-1} A_3, \quad N(\mu) \approx N_0 = A_2 A_4^{-1}, \quad \tilde{A}_1 = A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, \quad (12)$$

$$\tilde{A}_4 \approx A_4, \quad \tilde{B}_1 \approx B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \quad \tilde{B}_2 \approx B_2, \quad \tilde{z} = \bar{z} + A_4^{-1} A_3 \bar{x}.$$

Граничные условия системы (11) определяются соотношениями:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \quad \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}_1. \quad (13)$$

Заметим, что системы (10) и (11) отличаются только вторыми уравнениями. Поэтому решение задачи (4), (6), (7) построим для системы (11). Поправка к первому приближению не представляет трудности, т.е. все изложенные процедуры для системы (11) аналогично повторяются для высших приближений. Следует заметить, что быстрая подсистема системы (11) рассматривается на большом промежутке времени, поэтому коэффициенты этой подсистемы считаются медленно меняющимися функциями [14].

Решение задачи

Решения системы (11) можно представить в виде

$$\bar{x}(t) = \exp(A_0(t-t_0))\bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \exp(A_0(t-s))B_0 u(s) ds, \quad (14)$$

$$\bar{z}(t, \mu) = \exp(A_4(t-t_0)/\mu)\tilde{z}_0 + \left(\frac{1}{\mu}\right) \int_{t_0}^t \exp(A_4(t-s)/\mu)B_2 u(s) ds, \quad (15)$$

где $\exp(A_0(t-t_0))$ – переходная матрица медленной подсистемы (11).

В силу соотношения (14) ограничение $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$ приводит к тому, что искомое управление $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t)$ должно удовлетворять условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \exp(A_0(t_1-s))B_0 u(s) ds = \alpha_1, \quad (16)$$

где $\alpha_1 = \bar{x}_1 - \exp(A_0(t_1-t_0))\bar{x}_0$.

Управление $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t)$ удовлетворяющее моментному соотношению (16) и доставляющее минимум функционалу (4), определяется формулой [13]

$$\bar{u}^*(t) = B_0' \exp(A_0'(t_1-t))W^{-1}(\bar{x}_1 - \exp(A_0(t_1-t_0))\bar{x}_0), \quad (17)$$

где $W = \int_{t_0}^{t_1} \exp(A_0(t_1-t))B_0 B_0' \exp(A_0'(t_1-t)) dt$.

Тогда оптимальные траектории $\bar{x}(t)$, $\tilde{z}(t, \mu)$ системы (11), соответствующее оптимально-управлению (17) записываются в виде:

$$\bar{x}^*(t) = \exp(A_0(t-t_0))\bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \exp(A_0(t-s))B_0\bar{u}^*(s)ds, \quad (18)$$

$$\tilde{z}^*(t) = -A_4^{-1}B_2\bar{u}^*(t), \quad (19)$$

где $\tilde{z}^*(t) = \bar{z}^*(t) + A_4^{-1}A_3\bar{x}^*(t)$, $\bar{u}^*(t)$ определяется из (17).

При $t = t_0$ и $t = t_1$ из (19) получаем:

$$\tilde{z}^*(t_0) = -A_4^{-1}B_2\bar{u}^*(t_0), \quad \tilde{z}^*(t_1) = -A_4^{-1}B_2\bar{u}^*(t_1). \quad (20)$$

В силу соотношений (15), (19), (20) разность векторов $\tilde{z}(t, \mu) - \tilde{z}^*(t)$ определяет оптимальную траекторию задачи (4), (11), (13) в форме

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0(t, \mu) = & \exp(A_4(t-t_0)/\mu) \left(\tilde{z}_0 + A_4^{-1}B_2\bar{u}^*(t_0) \right) - \\ & - A_4^{-1}B_2\bar{u}^*(t) + \left(\frac{1}{\mu} \right) \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{A_4(t-s)}{\mu} \right) B_2\bar{u}_0^*(s) ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Для задачи (4), (11), (13) определим управление в виде

$$u_0^*(t, \mu) = \begin{cases} \bar{u}^*(t), & t_0 \leq t \leq t_1, \\ V\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right), & 0 \leq \frac{t-t_0}{\mu} \leq \frac{t_1-t_0}{\mu} < +\infty, \end{cases} \quad (22)$$

где $V\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)$ – пограничная функция, которая имеет экспоненциальный характер убывания.

Управление $u_0^*(t, \mu) = \bar{u}^*(t)$, имеющее минимальную норму и переводящее медленную подсистему (11) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_1) = x_1$ известно.

Теперь остается построить управление $V\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)$.

При $t = t_1$ с учетом (4), (22) из (21) получим

$$\int_0^{+\infty} \exp(A_4\lambda)B_2V(\lambda)d\lambda = \alpha_2, \quad (23)$$

$$\int_0^{+\infty} V^2(\lambda)d\lambda \rightarrow \min, \quad (24)$$

где

$$\alpha_2 = \tilde{z}_1 - \exp(A_4\lambda_1) \left(\tilde{z}_0 + A_4^{-1}B_2\bar{u}^*(t_0) \right) + A_4^{-1}B_2\bar{u}^*(t_1), \lambda_1 = \frac{t_1-t_0}{\mu}. \quad (25)$$

Решение задачи (23), (24) согласно проблемы моментов записывается в виде [13]

$$V(\lambda) = B_2' \exp(A_4'\lambda) \Theta^{-1} \alpha_2, \quad (26)$$

где

$$\Theta = \int_0^{+\infty} \exp(A_4\lambda)B_2B_2' \exp(A_4'\lambda)d\lambda, \lambda = \frac{t-t_0}{\mu}. \quad (27)$$

Управление $u_0^*(t, \mu) = V(\lambda)$ переводит быструю подсистему систем (11) из начального состояния $\tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0$ в конечное состояние $\tilde{z}(t_1) = \tilde{z}_1$, имеет минимальную норму и при $\lambda \rightarrow +\infty$ ($\mu \rightarrow 0$) стремится к нулю.

С учетом (26) из (21) будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0(t, \mu) = \exp(A_4(t-t_0)/\mu) (\tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t_0)) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t) + \\ + F(\sigma, \sigma_0) \Theta^{-1} (\tilde{z}_1 - \exp(A_4 \lambda_1) (\tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t_0)) + A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t_1)), \end{aligned} \quad (28)$$

где $F(\sigma, \sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \exp(-A_4(\tau - \sigma)) B_2 B_2' \exp(-A_4'(\tau - \sigma)) d\tau, \sigma = \frac{t-t_1}{\mu}, \sigma_0 = \frac{t_0-t_1}{\mu}.$

Матрица $F(t, t_0)$ в (28) удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению [15]

$$\frac{d F(\sigma, \sigma_0)}{d t} = A_4 F(\sigma, \sigma_0) + F'(\sigma, \sigma_0) A_4' + B_2 B_2', \quad F(t_0, t_0) = 0, \quad (29)$$

По условию (5) A_4 – устойчивая матрица, поэтому несобственный интеграл в (27) сходится и является единственным решением алгебраического матричного уравнения [15]

$$A_4 F(\sigma, \sigma_0) + F'(\sigma, \sigma_0) A_4' + B_2 B_2' = 0. \quad (30)$$

Введем в (29) замену переменной

$$Q(\sigma, \sigma_0) = F(\sigma, \sigma_0) - \Theta. \quad (31)$$

Тогда с учетом (30) из (29) имеем

$$\frac{d Q(\sigma, \sigma_0)}{d t} = A_4 Q(\sigma, \sigma_0) + Q'(\sigma, \sigma_0) A_4', \quad Q(\sigma_0, \sigma_0) = -\Theta, \quad (32)$$

Решение матричного уравнения (32) имеет вид [15]

$$Q(\sigma, \sigma_0) = -\exp(A_4(\sigma - \sigma_0)) \Theta \exp(A_4'(\sigma - \sigma_0)) = -\exp(A_4 \lambda) \Theta \exp(A_4' \lambda). \quad (33)$$

Тогда с учетом замены (31)

$$F(t, t_0) = \Theta - \exp(A_4 \lambda) \Theta \exp(A_4' \lambda). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (28) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0(t, \mu) = \exp(A_4(t-t_0)/\mu) (\tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t_0)) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t) + \\ + (\Theta - \exp(A_4 \lambda) \Theta \exp(A_4' \lambda)) \Theta^{-1} (\tilde{z}_1 - \exp(A_4 \lambda_1) (\tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t_0)) + A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t_1)). \end{aligned} \quad (35)$$

Оптимальная траектория $\tilde{z}_0(t, \mu)$ удовлетворяет всем граничным условиям (13) и для нее имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \tilde{z}_0(t, \mu) = \tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t_0) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t).$$

Траектория функции

$$\tilde{z}_0^2(t) = A_4^{-1} B_2 \bar{u}^*(t) \quad (36)$$

формирует «магистраль». Оптимальная траектория процесса, выходя из начальной точки направляется к магистрали, и в течении достаточно долгого времени находится вблизи этой линии (при достаточно малых μ), и уходит с неё для достижения заданного конечного состояния.

Введем следующие значения параметров системы (1):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 47 \\ 0,0001 & 0,0138 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,0914 & 0,2161 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,0005 & -0,3583 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,1084 & -1,4862 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,52 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,313 \end{pmatrix}, \mu = 0,01, t_0 = 0, t_1 = 1.$$

Корни характеристического уравнения матрицы A_4 удовлетворяют неравенству (5):

$$\gamma_1 = -0,0769, \gamma_2 = -1,4093.$$

Согласно (12) находим: $H_0 = \begin{pmatrix} 0,0046 & 3,3054 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1,0370 & -0,2883 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 47 \\ -0,0003 & -0,2883 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12530,77 \end{pmatrix}.$$

Находим переходную матрицу $\exp(A_0(t_1 - t))$, используя преобразования Лапласа [15]:

$$\exp(A_0(t_1 - t)) = \begin{pmatrix} 0,5 \exp(-0,45175(t_1 - t)) + 0,5 \exp(-0,12485(t_1 - t)) & \\ 0,000918 \exp(-0,45175(t_1 - t)) + 0,000918 \exp(-0,12485(t_1 - t)) & \\ -143,7749 \exp(-0,45175(t_1 - t)) + 143,7749 \exp(-0,12485(t_1 - t)) & \\ 1,38193 \exp(-0,45175(t_1 - t)) - 1,38193 \exp(-0,12485(t_1 - t)) & \end{pmatrix} \quad (37)$$

Далее вычисляем элементы матриц W из (17) при $t_0 = 0, t_1 = 1$:

$$W = \int_0^1 \exp(A_0(1-t)) B_0 B_0' \exp(A_0'(1-t)) dt = \begin{pmatrix} 1,51031E+13 & -723703490,9 \\ -723703490,9 & 1395315039 \end{pmatrix}.$$

При фиксированных начальных и конечных условиях:

$$(\bar{x}_0^{(1)} \bar{x}_0^{(2)})' = (11)', \quad (z_0^{(1)} z_0^{(2)})' = (11)', \quad (38)$$

$$(\bar{x}_1^{(1)} \bar{x}_1^{(2)})' = (00)', \quad (z_1^{(1)} z_1^{(2)})' = (00)', \quad (39)$$

согласно (17) получаем оптимальное управление $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t)$ имеющее минимальную норму и переводящее медленную подсистему (11) из начального состояния (38) в конечное состояние (39):

$$\bar{u}^*(t) = (3,29337E - 05) \exp(-0,45175(1-t)) - (3,29337E - 05) \exp(-0,12485(1-t)). \quad (40)$$

Теперь построим управление $u_0^*(t, \mu) = V(\lambda)$, которые переводит быструю подсистему систем (11) из начального состояния

$$\tilde{z}(0) = \tilde{z}_0 = z_0 - H_0 x_0 = \begin{pmatrix} -2,31 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

в конечное состояние

$$\tilde{z}(1) = \tilde{z}_1 = z_1 - H_0 x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

имеет минимальную норму и при $\lambda \rightarrow +\infty$ ($\mu \rightarrow 0$) стремится к нулю.

Переходная матрица $\exp(A_4(t-t_0)/\mu)$ и α_2 из (25) при $\mu = 0,01$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ имеют вид:

$$\exp(A_4 t / \mu) = \begin{pmatrix} \exp(-0,07692t / \mu) \\ 0,081359 \exp(-1,40928t / \mu) - 0,081359 \exp(-0,07692t / \mu) \\ -0,7505464 \exp\left(-\frac{1,40928t}{\mu}\right) + 0,7505464 \exp(-0,07692t / \mu) \\ 1,05773 \exp(-1,40928t / \mu) - 0,05773 \exp(-0,07692t / \mu) \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0,000204561 \\ -1,81646E - 05 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Далее вычисляем Θ из (26) и Θ^{-1} :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0,095419732 & -0,004740922 \\ -0,004740922 & 0,000694258 \end{pmatrix}, \Theta^{-1} = \begin{pmatrix} 15,86165516 & 108,31541 \\ 108,31541 & 2180,045704 \end{pmatrix}.$$

Управление $u_0^*(t, \mu) = V(\lambda)$, которые переводит быструю подсистему систем (11) из начального состояния (41) в конечное состояние (42) согласно (26) записываем в виде

$$V(t) = -0,007493824 \exp\left(-\frac{1,40928t}{\mu}\right) + 0,003311447 \exp\left(-\frac{0,07692t}{\mu}\right). \quad (44)$$

Магистраль $\tilde{z}_0^2(t)$ и пограничные функции $\tilde{z}_0^1(t, \mu)$ и $\tilde{z}_0^3(t, \mu)$ имеют вид:

$$\tilde{z}_0^2(t) = \begin{pmatrix} -4,515415 \exp(-0,45175(1-t)) + 4,515415 \exp(-0,12485(1-t)) \\ (3,29337E - 05) \exp(-0,45175(1-t)) - (3,29337E - 05) \exp(-0,12485(1-t)) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\tilde{z}_0^1(t) = \begin{pmatrix} -0,7505464 \exp\left(-\frac{1,40928t}{\mu}\right) - 1,559454 \exp\left(-\frac{0,07692t}{\mu}\right) \\ 0,869793 \exp\left(-\frac{1,40928t}{\mu}\right) + 0,13020698 \exp\left(-\frac{0,07692t}{\mu}\right) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\tilde{z}_0^3(t) = \begin{pmatrix} -0,75054 \exp\left(-\frac{1,40928t}{\mu}\right) - 0,44814 \exp\left(-\frac{0,07692t}{\mu}\right) + \\ 0,960199 \exp\left(-\frac{1,40928t}{\mu}\right) + 0,039793 \exp\left(-\frac{0,07692t}{\mu}\right) - \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} &+ 4,515415 \exp(-0,45175(1-t)) - 4,515415 \exp(-0,12485(1-t)) + 0,0002046 - \\ &- (3,29337E - 05) \exp(-0,45175(1-t)) + (3,29337E - 05) \exp(-0,12485(1-t)) - (6,05494E - 06) + \\ &- (9,09246E - 06) \exp\left(-\frac{2,8186t}{\mu}\right) - (8,58638E - 05) \exp\left(-\frac{1,44862t}{\mu}\right) - 0,00012 \exp\left(-\frac{0154,t}{\mu}\right) \\ &+ (7,6978E - 06) \exp\left(-\frac{2,8186t}{\mu}\right) - (7,469E - 06) \exp\left(-\frac{1,44862t}{\mu}\right) + 2,7025 \exp\left(-\frac{0154,t}{\mu}\right) \end{aligned}$$

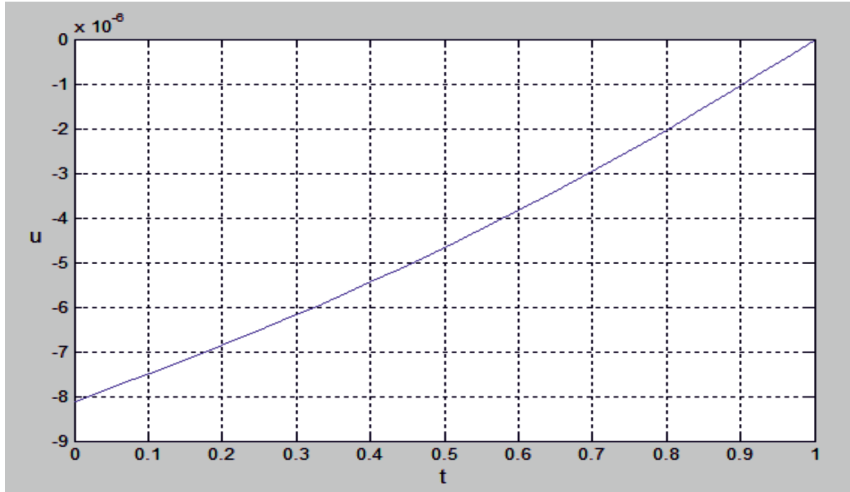


Рис. 1. Оптимальное управление медленной подсистемы

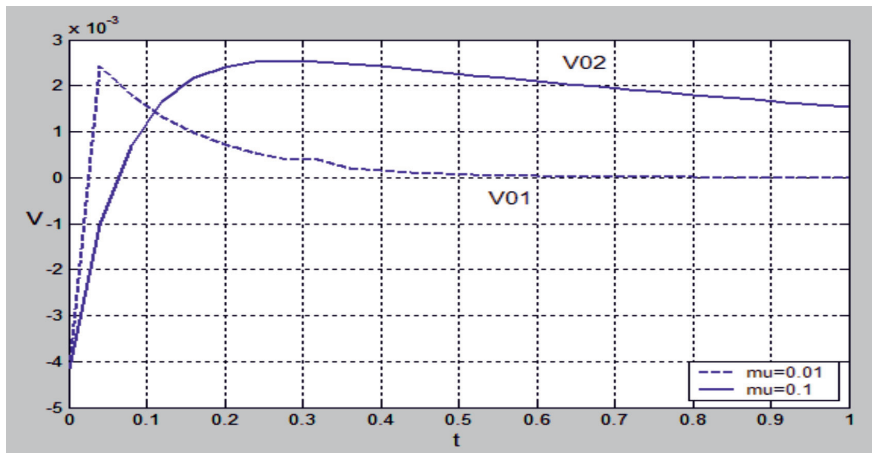


Рис. 2. Оптимальное управление быстрой подсистемы

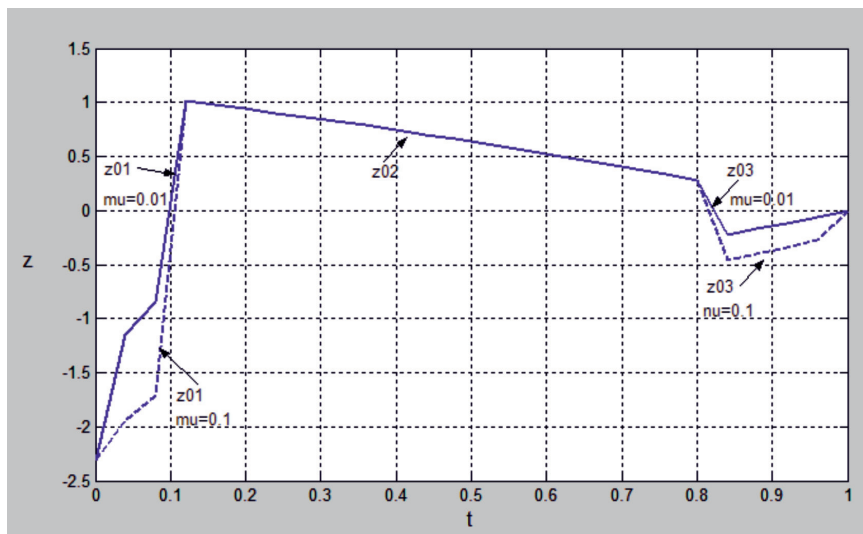


Рис. 3. Оптимальная траектория процесса

Результаты моделирование оптимального управления $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t)$ имеющее минимальную норму и переводящее медленную подсистему (11) из начального состояния (38) в конечное состояние (39) согласны (40) показаны на рис. 1.

Результаты моделирование оптимального управления $u_0^*(t, \mu) = V(\lambda)$, которые переводит быструю подсистему систем (11) из начального состояния (41) в конечное состояние (42) согласно (44), при различных значениях параметра μ ($\mu = 0,01$ и $\mu = 0,1$) приведены на рис. 2.

Результаты моделирования оптимальных траекторий соответствующие оптимальным управлениям (40) и (44) приведены на рис. 3.

Таким образом, оптимальная траектория $\tilde{z}_0(t, \mu)$ состоит из трех составляющих первое из них $\tilde{z}_0^1(t, \mu)$ из (45) формирует «магистраль», остальные две пограничные функции: $\tilde{z}_0^2(t, \mu)$ и $\tilde{z}_0^3(t, \mu)$ соответственно описывают переходы от начального состояния на магистраль и с магистрали в конечное состояние.

Заключение

В данной работе предложен способ решения сингулярно-возмущенной задачи оптимального управления при минимуме квадратичного функционала, который оценивает энергии управляющего воздействия. Для данной задачи предложен эффективный алгоритм нулевого равномерного асимптотического приближенного решения на основе совместного использования методов разделения движений и проблемы моментов.

Список литературы

1. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

2. Воропаева Н.В. Декомпозиция разнотемповых динамических систем со слабой диссипацией // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. 2013. № 9/2 (110). С. 5–10.

3. Соболев В.А., Осинцев М.С. Метод интегральных многообразий в задачах оптимального управления сингулярно-возмущенными системами // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, ИПУ РАН. 2014. С. 769–779.

4. Воропаева Н.В. Декомпозиция задач управления разнотемповых систем с дискретным временем // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, ИПУ РАН. 2014. С. 842–848.

5. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Б. Разделение медленных и быстрых процессов в сингулярно-возмущенной управляемой системе // Известия КГТУ им. И. Раззакова. 2008. № 12. С. 173–178.

6. Иманалиев З.К., Кадыров Ч.А. Исследование задачи об оптимальном управлении для системы с разнотемповыми движениями в энергетическом пространстве // Автоматика и программная инженерия. 2017. № 2 (20). С. 121–125.

7. Калинин А.И. Асимптотический метод решения задачи об управлении с минимальной силой для линейной сингулярно-возмущенной системы // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 12. С. 2115–2125.

8. Калинин А.И., Лавринович Л.И. Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Докл. Национальной академии наук Беларуси. 2016. Т. 60. № 2. С. 31–34.

9. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г. Математические проблемы динамики неоднородных систем. Магистральные траектории в экономике и сингулярные возмущения // Труды ИСА РАН. 2015. Т. 65. № 1. С. 60–67.

10. Дмитриев М.Г., Сачков Ю.Л. Асимптотическое решение сингулярно-возмущенной задачи оптимального управления, связанной с восстановлением поврежденной кривой // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1381–1389. DOI: 10.1134/S0374064113110034.

11. Гребенникова И.В. Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно-возмущенной системой с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 28–39.

12. Калашникова М.А. Асимптотика приближения нулевого порядка решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. № 1. С. 85–104.

13. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

14. Викторов Б.В. Особенности поведения систем управления с резко отличными темпами составляющих движения // Изв. АН СССР, сер. Техн. Кибернетика. 1967. № 5. С. 190–195.

15. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.