СТАТЬИ

УДК 532.516

СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ САМОДВИЖУЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

[1,2]Сенницкий В.Л., [1,2]Гребнева В.А.

[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;

[2]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: sennitskii@yandex.ru

Рассмотрена задача о стационарном обтекании не ограниченной извне вязкой жидкостью твердого бесконечно длинного цилиндрического тела. Граница тела проницаема для жидкости. Течение жидкости является плоским. Тело может совершать (или не совершать) самодвижение в жидкости, обусловленное протеканием (втеканием и вытеканием) жидкости через его границу. Постановка полной задачи включает в себя уравнения самодвижения тела (части тела конечной длины), уравнения Навье – Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на твердой границе жидкости и на бесконечности. Изучение задачи проведено для малых по сравнению с единицей значений числа Рейнольдса, в приближении Стокса. Установлено, что решение задачи о течении жидкости существует, характерный парадокс Стокса отсутствует тогда и только тогда, когда тело является самодвижущимся. Найдено решение задачи о стационарном обтекании вязкой жидкостью самодвижущегося цилиндрического тела в приближении Стокса. Осуществление телом самодвижения в жидкости соответствует тому, что, находясь в жидкости, тело перемещается, отталкиваясь от нее. Самодвижение в жидкости могут совершать живые организмы, технические устройства (рыбы, подводные аппараты). Исследованиями обтекания жидкостью самодвижущихся тел определяется актуальное направление в механике жидкости.

Ключевые слова: вязкая жидкость, стационарное плоское течение, самодвижущееся цилиндрическое тело, парадокс Стокса

STATIONARY FLOW OF A VISCOUS LIQUID PAST A SELF-MOVING CYLINRICAL BODY

[1,2]Sennitskiy V.L., [1,2]Grebneva V.A.

[1]Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk;

[2]Novosibirsk State University, Novosibirsk, e-mail: sennitskii@yandex.ru

The problem is considered on a stationary flow of an unbounded from outside viscous liquid past a solid endless cylindrical body. The boundary of the body is pervious for the liquid. The flow of the liquid is flat. The body can perform (or not perform) a self-motion in the liquid caused by passing (an inflow and an outflow) of the liquid through its boundary. The formulation of the full problem includes the equations of the self-motion of the body (the body part of a finite length), the equations of Navier–Stokes and a continuity and conditions which must be fulfilled at the solid boundary of the liquid and at infinity. The study of the problem is conducted for the meanings of the Reynolds number which are small in compare with unit, in the Stokes approximation. It is revealed that the solution of the liquid flow problem exists, the characteristic Stokes paradox is absent then and only then when the body is self-moving. The solution is found of the problem on the stationary flow of the viscous liquid past the self-moving cylindrical body in the Stokes approximation. The realization of a body self-motion in a liquid corresponds to that the body being in the liquid moves by pushing off from it. A self-motion in a liquid can be performed by living things, technical devices (fishes, underwater apparatuses). The investigations of a liquid flow past self-moving bodies determine an actual direction in fluid mechanics.

Keywords: viscous liquid, stationary flat flow, self-moving cylindrical body, paradox of Stokes

В работе [1] сформулирована концепция самодвижения тела в жидкости. Находящееся в жидкости тело совершает в ней самодвижение, если движение тела является следствием того, что тело отталкивается от жидкости. Самодвижение тела в жидкости происходит за счет взаимодействия между его границей и жидкостью (но не вследствие каких-либо воздействий на жидкость, которые могут осуществляться и в отсутствие в ней тела). Ввиду этого граница самодвижущегося тела является его движителем. Работа движителя при самодвижении соответствует тому, что на границе тела обеспечиваются условия, при которых выполняются уравнения самодвижения тела в жидкости.

Исследования, направленные на выявление закономерностей течения жидкости вокруг самодвижущихся тел, неизменно сохраняют актуальность. В работах [2, 3] выполнено моделирование течения жидкости в следе за телом; работы [4, 5] посвящены рассмотрению течения жидкости вокруг вращающегося тора. В основном интерес представляет движение вязкой жидкости. Задачи, касающиеся динамики вязкой жидкости, как правило, характеризуются повышенным уровнем сложности. Весомым дополнительным препятствием в их изучении является парадокс Стокса. Данный парадокс состоит в том, что решение задачи о плоском течении не ограниченной извне, покоящейся на бесконечности вязкой жидкости вокруг твердого цилиндрического тела, движущегося в ней с постоянной скоростью – равно как и решение эквивалентной задачи о стационарном обтекании твердого цилиндрического тела вязкой жидкостью – при малых значениях числа Рейнольдса, в приближении Стокса не существует.

Главной целью настоящей работы является установление связи между самодвижением твердого цилиндрического тела в вязкой жидкости и парадоксом Стокса.

В вязкой несжимаемой не ограниченной извне жидкости находится твердое тело Ξ – бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса A. Тело Ξ покоится относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Жидкость на бесконечности движется с постоянной скоростью $\mathbf{V}_\infty = \{V_\infty, 0, 0\}$ ($V_\infty > 0$). Граница тела Ξ – цилиндрическая поверхность Γ_Ξ: $X^2 + Y^2 = A^2$ ($-\infty < Z < \infty$) – проницаема для жидкости. Течение жидкости является стационарным, плоским и симметричным относительно плоскости $Y = 0$. Тело Ξ может совершать (или не совершать) самодвижение в жидкости, обусловленное протеканием (втеканием и вытеканием) жидкости через поверхность Γ_Ξ. Самодвижение тела Ξ относительно жидкости на бесконечности происходит со скоростью $-\mathbf{V}_\infty$.

Пусть $x = X/A$; $y = Y/A$; $z = Z/A$; $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$; $\mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$; $\mathbf{e}_z = \{0, 0, 1\}$; $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$; $r = |\mathbf{r}|$; $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$; θ – угол между векторами $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_r$; $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$; ξ – часть тела Ξ, «вписанная» между плоскостями $Z = -H/2$ и $Z = H/2$ ($H > 0$ – постоянная); $h = H/A$; Γ_ξ – боковая поверхность тела ξ; $\mathbf{V}$, ρ и ν – соответственно скорость, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathbf{v} = \mathbf{V}/V_\infty = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$; P – давление в жидкости; $p = P/(\rho V_\infty^2)$; $\mathrm{Re} = AV_\infty/\nu$ – число Рейнольдса; $\varphi = \varphi(\theta, \mathrm{Re}) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \cos n\theta$ ($\varphi_n = \varphi_n(\mathrm{Re})$); $\mathbf{S}$ – поток импульса жидкости через поверхность Γ_ξ в тело ξ (импульс, передаваемый жидкостью телу ξ в единицу времени); $\mathbf{T}$ – поток момента импульса жидкости относительно начала координат X, Y, Z через поверхность Γ_ξ в тело ξ (момент импульса, передаваемый жидкостью телу ξ в единицу времени, относительно начала координат X, Y, Z);

$$p_{rr} = -p + \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v_r}{\partial r};\quad p_{r\theta} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right);$$

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{S}}{\rho V_\infty^2 AH} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(p_{rr}\mathbf{e}_r + p_{r\theta}\mathbf{e}_\theta - v_r\mathbf{v}\right)_{|r=1} d\theta;$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}}{\rho V_\infty^2 A^3} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z\right)\times\left(p_{rr}\mathbf{e}_r + p_{r\theta}\mathbf{e}_\theta - v_r\mathbf{v}\right)_{|r=1} dz\, d\theta.$$

Определим следующую – полную – задачу

$$\mathbf{s} = 0; \tag{1}$$

$$\mathbf{t} = 0 \tag{2}$$

– уравнения самодвижения тела Ξ (тела ξ) в жидкости;

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}; \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{4}$$

– уравнения Навье – Стокса и неразрывности;

$$\mathbf{v} = \varphi\mathbf{e}_r \text{ при } r = 1; \tag{5}$$

$$\mathbf{v} \to \mathbf{e}_x \text{ при } r \to \infty \tag{6}$$

– условия на твердой границе жидкости и на бесконечности.

Согласно (1), (2) имеем

$$f + g = 0, \tag{7}$$

где

$$f = \frac{F}{\rho V_\infty^2\ AH} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(p_{rr}\ \cos\theta\ -\ p_{r\theta}\ \sin\theta\right)_{|r=1} d\theta \tag{8}$$

(F – сила, действующая со стороны жидкости на тело ξ в направлении оси X);

$$g = \int_{-\pi}^{\pi} \left[v_r \left(v_\theta \sin\theta - v_r \cos\theta \right) \right]_{|r=1} d\theta.$$

Тело Ξ является самодвижущимся (в жидкости) тогда и только тогда, когда выполняется уравнение (7).

Будем рассматривать задачу (3)–(7) при малых по сравнению с единицей значениях Re.

Предположим, что

$$\varphi_n \sim \varphi'_n \ (n = 1, 2, \ldots),\ \varphi \sim \varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_n \cos n\theta,$$

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' = v'_r\, \mathbf{e}_r + v'_\theta\, \mathbf{e}_\theta,\ p \sim \frac{1}{Re} p' \text{ при } Re \to 0. \tag{9}$$

Согласно (8), (9) имеем

$$f \sim \frac{1}{Re} f' \text{ при } Re \to 0. \tag{10}$$

Здесь

$$f' = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(-p' + 2\frac{\partial v'_r}{\partial r} \right) \cos\theta\ -\ \left(\frac{\partial v'_\theta}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v'_r}{\partial \theta} \right) \sin\theta \right]_{|r=1} d\theta. \tag{11}$$

Используя (3)–(7), (9), (10), получим

$$f' = 0 \tag{12}$$

– уравнение самодвижения тела Ξ (тела ξ) в жидкости в приближении Стокса;

$$\Delta\mathbf{v}' = \nabla p'; \tag{13}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}' = 0; \tag{14}$$

$$v' = \varphi' \mathbf{e}_r \text{ при } r = 1; \tag{15}$$

$$v' \to \mathbf{e}_x \text{ при } r \to \infty \tag{16}$$

– задача о течении жидкости в приближении Стокса.

Пусть

$$\omega = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_z = \frac{\partial v'_\theta}{\partial r} + \frac{v'_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v'_r}{\partial \theta} \tag{17}$$

($\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{v}'$ – безразмерная завихренность жидкости в приближении Стокса).

Используя (13), (14), преобразуем формулу (11) к виду

$$f' = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\omega}{r} \right)_{|r=1} \sin\theta\ d\theta\ . \tag{18}$$

В соответствии с (14)–(17) выполняются соотношения

$$v'_r\, v = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ v'_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}; \tag{19}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \varphi' \text{ при } r = 1; \tag{20}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} \to \sin\theta,\ \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \to \cos\theta \text{ при } r \to \infty; \tag{21}$$

$$\Delta\psi = -\omega \tag{22}$$

(ψ – безразмерная функция тока жидкости в приближении Стокса).

Из (13) следует

$$\Delta\omega = 0. \tag{23}$$

Решая уравнение (23), найдем

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n r^{-n} + \beta_n r^n\right)\sin n\theta, \tag{24}$$

где α_n, β_n – постоянные.

Используя (18), (24), получим

$$f' = -2\pi\alpha_1. \tag{25}$$

Согласно (25) уравнение (12) выполняется, тело Ξ является самодвижущимся (в жидкости) тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = 0$.

Обратимся к задаче (20), (22), (24). Решая данную задачу, принимая во внимание соотношение (25), найдем

$$\psi = \frac{1}{4}\left\{\left[\left(\frac{f'}{2\pi} - \frac{\beta_1}{2} + 2\varphi'_1\right)r^{-1} - \left(\frac{f'}{2\pi} - \beta_1 - 2\varphi'_1\right)r + \frac{f'}{\pi} r\ln r - \frac{\beta_1}{2} r^3\right]\sin\theta - \right.$$

$$\left.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\alpha_n + \frac{\beta_n}{n+1} - 2\varphi'_n\right)r^{-n} + \left(\frac{\alpha_n}{n-1} - \beta_n - 2\varphi'_n\right)r^n - \frac{n\alpha_n}{n-1}r^{2-n} + \frac{n\beta_n}{n+1}r^{2+n}\right]\sin n\theta\right\}. \tag{26}$$

Пусть тело Ξ не является самодвижущимся (уравнение самодвижения (12) не выполняется). Тогда функция ψ (определяемая формулой (26)) не удовлетворяет условиям (21) ни при каких значениях постоянных α_m($m = 2,3,\ldots$), β_n($n = 1,2,\ldots$) ввиду присутствия в правой части (26) слагаемого $(4\pi)^{-1}f'\, r \ln r \sin\theta$, решение задачи (13)–(16) не существует.

Пусть тело Ξ является самодвижущимся (уравнение самодвижения (12) выполняется). Используя (21), (26), найдем

$$\alpha_m = 2(m-1)\varphi'_m\,(m = 2, 3, \ldots),\ \beta_n = 0\,(n = 1, 2, \ldots);$$

$$\psi = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_n\left(\frac{2-n}{n}r^{-n} + r^{2-n}\right)\sin n\theta. \tag{27}$$

Здесь $\varphi'_1 = 2$. Из (13), (19), (27) следует

$$p' = 2\sum_{m=2}^{\infty}(m-1)\,\varphi'_m r^{-m}\cos m\theta + c, \tag{28}$$

где c – функция времени. Задача (13)–(16) имеет решение (19), (27), (28).

Таким образом, решение плоской задачи о стационарном обтекании не ограниченной извне вязкой жидкостью твердого цилиндрического тела, при малых значениях числа Рейнольдса (в приближении Стокса) существует – парадокс Стокса отсутствует – тогда и только тогда, когда обтекаемое жидкостью тело является самодвижущимся. Отметим, что данный результат получен ранее в работе [6] для твердого цилиндрического тела с движущейся границей.

Заключение

Выявление закономерностей совместного движения твердых тел и вязкой жидкости в различных гидромеханических условиях является одной из важнейших проблем механики жидкости. В связи с этим может представлять существенный интерес проведенное в данной работе рассмотрение, указывающее, в частности, на наличие нетривиального подхода, позволяющего обойти парадокс Стокса, избежать его возникновения. Изложенное в настоящей работе может использоваться в исследованиях в области механики жидкости, в том числе при поиске и изучении новых содержательных задач о плоских течениях вязкой жидкости вокруг твердых цилиндрических тел.

Список литературы

1. Сенницкий В.Л. О самодвижении тела в жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1990. № 2. С. 111–118.

2. Деменков А.Г., Черных Г.Г. Численное моделирование вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 5. С. 693–702.

3. Деменков А.Г., Черных Г.Г. Численное моделирование динамики закрученного безымпульсного турбулентного следа // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23. № 5. С. 37–48.

4. Moshkin N.P., Suwannasri P. Self-propelled motion of a torus rotating about its centerline in a viscous incompressible liquid. Phys. Fluids. 2010. V. 22. P. 113602–1–113602–9.

5. Moshkin N.P., Suwannasri P. Two regimes of self-propelled motion of a torus rotating about its centerline in a viscous incompressible liquid at intermediate Reynolds numbers. Phys. Fluids. 2012. V. 24. P. 053603–1–053603–11.

6. Сенницкий В.Л. О течении жидкости вокруг самоходного тела // Прикладная механика и техническая физика. 1978. № 3. С. 76–83.