

## СТАТЬИ

УДК 519.6

**УПРАВЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОСАДКОЙ ВОЗВРАЩАЕМЫХ  
МОДУЛЕЙ И ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА  
ПРЕДЛОЖЕННОГО АЛГОРИТМА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ****Мозжорина Т.Ю., Осипов В.В.***Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет), Москва, e-mail: Mozzhorina@mail.ru*

В данной работе рассматривается один из предлагаемых алгоритмов обратной связи при вертикальной посадке возвращаемой первой ступени космического аппарата для ее повторного использования в дальнейшем. Сделана попытка осуществить модификацию предложенного А.М. Летовым алгоритма синтеза оптимального управления, в котором предлагается использовать для поправки тяги не двигатели коррекции, а основной двигатель силовой установки космического аппарата. Проводится численный эксперимент методом Монте-Карло для оценки работоспособности указанного алгоритма. Под мягкой посадкой понимается приземление с нулевой или не превышающей нескольких метров в секунду скоростью. Исследованию подлежит последний участок вертикального приземления. Оптимальным программным управлением в данной постановке задачи с точки зрения минимальных затрат топлива является свободное падение, затем включение двигателя на полную мощность до момента приземления. Предполагается возможное случайное отклонение таких параметров от расчетных значений, как скорость и масса возвращаемого модуля космического аппарата на высоте 2000 м, удельный импульс, а также плотность воздуха и коэффициент аэродинамического сопротивления. Предполагается, что распределены эти случайные величины по нормальному закону, независимы и их отклонения от расчетных значений не превышают 1 % по импульсу двигателя и 5 % по всем остальным переменным. Скорость приземления при этом – случайная величина, для которой вычисляются параметры распределения. Проводится анализ полученных результатов расчета.

**Ключевые слова:** метод Монте-Карло, задача о мягком приземлении, вероятностный анализ, возвращаемая ступень космического аппарата, оптимальное управление, управление с обратной связью

**VERTICAL LANDING CONTROL OF RETURNED MODULES AND PROBABILITY  
ASSESSMENT OF THE QUALITY OF THE PROPOSED FEEDBACK ALGORITHM****Mozzhorina T.Yu., Osipov V.V.***Bauman Moscow State Technical University, Moscow, e-mail: Mozzhorina@mail.ru*

In this paper, we consider one of the proposed feedback algorithms for the vertical landing of the returned first stage of the spacecraft for its reuse in the future. An attempt is made to modify the optimal control synthesis algorithm proposed by Letov a.m., in which it is proposed to use the main engine of the spacecraft's power plant rather than the correction engines for the thrust correction. A numerical experiment using the Monte Carlo method is performed to evaluate the performance of this algorithm. A soft landing is a landing with a speed of zero or no more than a few meters per second. The last section of the vertical landing is subject to investigation. The optimal program control in this problem statement in terms of minimum fuel consumption is free fall, then turning the engine on at full power until the moment of landing. It is assumed that such parameters as the speed and mass of the spacecraft's return module at an altitude of 2000 m, the specific impulse, as well as the air density and the coefficient of aerodynamic drag can be randomly deviated from the calculated values. It is assumed that these random variables are distributed according to the normal law, are independent, and their deviations from the calculated values do not exceed 1 % for the engine pulse and 5 % for all other variables. The landing speed is a random value for which the distribution parameters are calculated. The results of the calculation are analyzed.

**Keywords:** Monte Carlo method, soft landing problem, probabilistic analysis, spacecraft return stage, optimal control, feedback control

Рассматривается мягкая посадка отработавшей первой ступени космического аппарата (КА). (Мягкая посадка в идеале – приземление с нулевой скоростью, в реальности мягкой посадкой считается для пассажирского самолета касание земли при вертикальной скорости снижения не превышающей 2 м/с, для КА – не превышающей 6 м/с.) Такие зарубежные фирмы, как Space Exploration Technologies Corporation (SpaceX) и Blue Origin, реализовали проекты, осуществляющие мягкую посадку

первых ступеней, и даже использовали их вторично при последующих запусках [1, 2].

Оптимальное управление (ОУ) на последнем вертикальном участке приземления по принципу максимума Понтрягина представляет собой вертикальное свободное падение вначале и затем торможение при максимально допустимом (с точки зрения прочности конструкции) значении тяги двигателей. В [3] были проведены расчеты для первой ступени, аналогичной первой ступени Falcon9, позволившие получить

оптимальное программное управление при принятом условии одного работающего двигателя ЖРД из силовой установки первой ступени. Математическая модель посадки с ОУ (при использовании принципа максимума Понтрягина) представляет собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая была решена методом пристрелки. Метод пристрелки дает наиболее точные результаты при численном решении краевых задач [4]. К сожалению, существуют определенные трудности в реализации метода пристрелки, в силу чего метод редко используют при решении инженерных задач. Но при определенном опыте работы с методом Ньютона вполне возможно его реализовать даже для задач ОУ с переключением [4, 5].

Особенность реализации подобного управления состоит в том, что конечное значение скорости в момент приземления очень сильно зависит от возможных случайных отклонений от расчетных значений таких параметров, как плотность атмосферного воздуха, коэффициент аэродинамического сопротивления, удельная тяга двигателя, скорость и масса ступени в начальный момент (задается значением начальной высоты вертикального участка приземления). Возможность реализации мягкой посадки с ОУ без обратной связи при возможном случайном отклонении указанных выше параметров (случайные величины (СВ) предполагаются независимыми и подчиняются нормальному закону с небольшими отклонениями от расчетных значений, принятых в [3]) рассмотрена в [6]. Вероятность осуществления мягкой посадки с программным ОУ без обратной связи чрезвычайно мала. Алгоритм обратной связи при мягком прилунении предложен в [7]. Проблема мягкой посадки КА рассматривается и в таких работах, как [8–11].

*Постановка задачи и математическое моделирование процесса посадки и алгоритма обратной связи*

Разработка синтеза ОУ (получения закона поправки на управление при отклонении СВ – алгоритма обратной связи) является темой настоящей работы. В [7] А.М. Летовым была предложена идея использования поправки на тягу основного двигателя в качестве компенсации возможных случайных отклонений при мягком прилунении. Система уравнений движения линеаризовалась и приобретала форму уравнений возмущенного движения. Алгоритм получения обратной связи предлагался следующий:

При функционале вида  $J = \int_0^T u dt \rightarrow \min$  исходная система состояния:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -V \\ \frac{dV}{dt} = -\frac{\beta u}{m} + g_{\text{л}}, \\ \frac{dm}{dt} = -G_{\text{т}} = -u \end{cases} \quad (1)$$

где  $h$  – расстояние от космического аппарата до поверхности Луны,  $V$  – скорость космического аппарата (ось скорости направлена вниз),  $m$  – масса космического аппарата,  $G_{\text{т}} = u$  – расход топлива (управление),  $T$  – конечный момент времени,  $g_{\text{л}} = 1,62$  – ускорение свободного падения на Луне,  $\beta \cdot u = P$  – тяга двигателя, коэффициент  $\beta$  пропорционален скорости истечения газа из сопла двигателя (импульс ракетного двигателя).

Система возмущенного движения принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{\beta u}{m^2} y_3 - \frac{\beta}{m} \Delta u \\ \frac{dy_3}{dt} = -\Delta u \end{cases} \quad (2)$$

где  $y_1 = \Delta h$ ,  $y_2 = \Delta V$ ,  $y_3 = \Delta m$ ,  $\Delta u$  – поправка на управление.

Функционал выбирался вида

$$J = \alpha_1 y_1(T)^2 + \alpha_2 y_2(T)^2 + \alpha_3 y_3(T)^2 \rightarrow \min,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$  – весовые коэффициенты. Предлагалось решать системы (1) и (2) последовательно. При этом начальные значения возмущений не предполагались слишком большими и должны были удовлетворять условию  $\gamma_1 y_1(0)^2 + \gamma_2 y_2(0)^2 + \gamma_3 y_3(0)^2 \leq r^2$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – весовые коэффициенты.

Несколько модифицированный по отношению к вышеуказанному алгоритм был применен к задаче мягкого приземления. Исходная система уравнений движения:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -V \\ \frac{dV}{dt} = -\frac{\beta u + X_{\text{аэп}}}{m} + g_{\text{л}}, \\ \frac{dm}{dt} = -G_{\text{т}} = -u \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений возмущенного движения:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{c_x \rho_h S \cdot V}{m} y_2 + \frac{c_x \rho_h S \cdot V^2}{2m^2} y_3 - \frac{\beta}{m} \Delta u, \\ \frac{dy_3}{dt} = -\Delta u \end{cases} \quad (4)$$

где  $y_1 = \Delta h$ ;  $y_2 = \Delta V$ ;  $y_3 = \Delta m$  – возмущения независимых переменных, связанных со случайными факторами,  $X_{\text{аэ}} = \frac{c_x \rho_h S \cdot V^2}{2}$  – сила аэродинамического сопротивления,  $c_x$  – коэффициент аэродинамического сопротивления первой ступени ракеты,  $\rho_h$  – плотность воздуха на текущей высоте,  $S$  – площадь мидела первой ступени.

Предполагая, что масса ракеты в начале последнего вертикального участка изменяется незначительно, и учитывая малость коэффициента при  $y_3$  во втором уравнении, оставим только первые два ДУ в системе возмущенного движения и будем считать, что масса приближенно остается постоянной. Обозначим коэффициенты в системе уравнений возмущенного движения:  $a = -\frac{c_x \rho_h S \cdot V}{m}$ ,  $b = -\frac{\beta}{m}$ .

Применим к задаче отыскания обратной связи метод аналитического конструирования оптимального регулятора. Хотя применение данного подхода к динамическому процессу, протекающему достаточно малое время, не совсем корректно, попробуем реализовать алгоритм.

Задачу синтеза оптимального регулятора сформулируем следующим образом:

$J = \int_0^{+\infty} (y_1^2 + y_2^2 + \Delta u^2) dt \rightarrow \min$  при линеаризованной и упрощенной системе возмущенного движения:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = ay_2 + b\Delta u \end{cases} \quad (5)$$

при  $y_1(0) = y_{10}$ ;  $y_2(0) = y_{20}$ , которые представляют собой отклонения параметров, измеряемых в процессе приземления, от расчетных значений оптимального процесса, полученных при решении системы (3) невозмущенного движения.

Матричное уравнение для отыскания синтезирующей функции  $\Delta u^* = -\frac{1}{q} B^T P y$ , полученное из уравнения Беллмана, имеет вид  $N + A^T P + P^T A - \frac{1}{q} (P B B^T P) = 0$ . Постановка задачи в общем виде:  $J(y, \Delta u) = \int_0^{\infty} (y^T N y + q(\Delta u)^2) dt \rightarrow \min$ ,  $y'(t) = A \cdot y + B \cdot \Delta u$ . В нашем

случае  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ;  $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $q = 1$ .

Отсюда имеем матричное алгебраическое уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} P + P \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \end{pmatrix} P = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} - \text{симметрическая}$$

положительно определенная матрица.

Расписав матричное уравнение покоординатно, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов матрицы  $P$ .

$$\begin{cases} -p_{12}^2 b^2 = -1 \\ -p_{11} + ap_{12} - b^2 p_{12} p_{22} = 0 \\ -2p_{12} + 2ap_{22} - b^2 p_{22}^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = p_{12}(a - b^2 p_{22}) \\ p_{12} = \frac{1}{b} \\ p_{21} = \frac{1}{b} \\ p_{22} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2(-1 + 2/b)}}{b^2} \end{cases}.$$

Подставляя численные значения коэффициентов  $a = -\frac{c_x \rho_h S \cdot V}{m}$ ,  $b = -\frac{\beta}{m}$  в каждый момент измерения скорости и высоты, получим синтезирующую функцию:

$$\Delta u^* = -bp_{21}y_1 - bp_{22}y_2. \quad (6)$$

Алгоритм вычислений имеет следующий вид.

Имеем зависимости  $h^*(t)$ ,  $V^*(t)$ ,  $u^*(t)$  – в оптимальном процессе без обратной связи, полученные в [3]. Предположим, что в реальном процессе рассматриваемые СВ (плотность атмосферного воздуха, коэффициент аэродинамического сопротивления, удельная тяга двигателя, скорость и масса ступени в начальный момент) отклоняются от расчетных значений. Тогда при достижении высоты включения двигателя из [3] происходит включение двигателя в реальном процессе. Если при заданной высоте скорость превышает оптимальное значение скорости включения двигателя, то принимаем за высоту вклю-

чения значение  $h_{\text{вкл}} + \frac{1,1 \cdot V(V - V^*(t))m^*(t)}{(u^*(t) + 20) \cdot \beta}$ , где второе слагаемое есть поправка на высоту, полученная из приближенного равенства импульса силы тяги разности импульса скорости в реальном движении и оптимальном.  $\Delta h_{\text{вкл}} = V(t) \cdot \frac{m(t)V(t) - m^*(t)V^*(t)}{P}$ , где

$$\Delta t = \frac{m(t)V(t) - m^*(t)V^*(t)}{P} \approx \frac{1,1(V(t) - V^*(t))m^*(t)}{P}. \text{ При этом предполагается, что двига-}$$

тель может дросселироваться до 60%, допустимый расход топлива лежит в диапазоне 195...325 кг/с. Зададимся временем такта измерения высоты и скорости приземления равным 0,04 с (в расчетах это время будет равно шагу интегрирования численного метода решения ОДУ). На каждом шаге интегрирования системы (3) вычисляем отклонения реальных параметров от оптимальных, а также поправку на расход топлива:  $y_1 = \Delta h = h(t) - h^*(t)$ ;  $y_2 = \Delta V = V(t) - V^*(t)$ ;  $\Delta u^* = -bp_{21}y_1 - bp_{22}y_2$ ;  $u = u^* + \Delta u^*(t)$ .

В момент времени, когда высота или скорость падения равна нулю, происходит отключение двигателя. Если нулевое значение скорости достигается при  $h > 0$ , то с этой высоты происходит свободное падение. Методом Монте-Карло проведем многократные вычисления снижения отработавшей ступени, обработаем статистически полученные данные и в результате сможем оценить вероятность мягкой посадки при выбранных законах распределения СВ.

#### Результаты расчетов

Для расчетов приземления спускаемого аппарата были взяты исходные данные, полученные в [3].

Свободное падение рассчитывалось с высоты 2000 м. Скорость в оптимальном процессе на этой высоте равна 160 м/с.

Значения переменных, соответствующие моменту включения двигателя в оптимальном процессе:

$$h_{\text{вкл}} = 488,0558 \text{ м}; V_{\text{вкл}} = 183,82 \frac{\text{м}}{\text{с}}; u = G_T = 305 \frac{\text{кг}}{\text{с}}; m = 20 \text{ т}; \beta = 2766 \frac{\text{м}}{\text{с}}; c_x = 0,8.$$

Принималось для метода Монте-Карло, моделирующего случайные отклонения расчетных параметров, что отклонения по массе, скорости,  $c_x$  и плотности воздуха не превышают 5%, а по удельному импульсу двигателя 1%. СВ распределены по нормальному закону и независимы. Указанные интервалы составляют диапазон  $-4\sigma \dots +4\sigma$ . Количество расчетных экспериментов в методе Монте-Карло – 1000.

В качестве зависимости плотности воздуха от высоты в стандартных условиях была принята следующая аппроксимация, дающая удовлетворительную точность до высоты в 20 км:

$$\rho_h = 1,22235514 - 0,11422776 \cdot \frac{h}{10^3} + \\ + 0,00368329 \left( \frac{h}{10^3} \right)^2 - 0,404 \left( \frac{h}{10^3} \right)^3 \cdot 10^{-3}.$$

На рис. 1 представлена фазовая траектория в оптимальном процессе.

На рис. 2 представлены полигоны распределения СВ скорости приземления, по-

строенные по средним значениям интервалов распределения, число которых выбиралось равным 20. Указанные кривые соответствуют статистической плотности вероятности.

На рис. 3 – кривые статистической функции вероятности для СВ скорости приземления.

В таблице представлены характеристики полученных распределений скорости приземления для всех трех расчетных случаев.

На рис. 4 и 5 представлено поведение управления и скорости снижения в зависимости от времени для варианта расчета 2 с максимальными отклонениями значений случайных величин. Варианты А и В – маловероятные случаи, характеризующие наихудшие сочетания из выбранных диапазонов изменения СВ.

*Вариант А* – отклонение по массе и скорости в начальный момент – 5%, по плотности и  $c_x$  +5%, по удельному импульсу двигателя +1% ( $V_k = 21,5$  м/с).

*Вариант В* – отклонение по массе и скорости в начальный момент +5%, по плотности и  $c_x$  -5%, по удельному импульсу двигателя -1% ( $V_k = 35,7$  м/с).

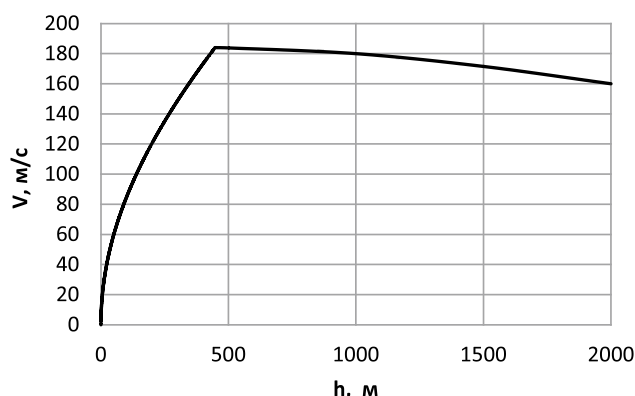


Рис. 1. Зависимость  $V^* = f(h^*)$  в оптимальном процессе

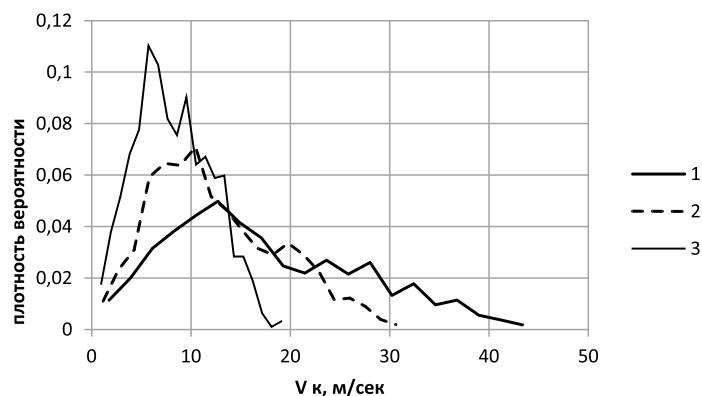


Рис. 2. Полигоны плотности вероятности СВ скорости приземления: 1 – расчет без поправки на управление, 2 – с поправкой на управление по формуле (6), 3 – с поправкой на управление по формуле (6) с отсутствием разброса по массе ступени в начальный момент

Вариант С – расчетный вариант оптимального управления без отклонений параметров ( $V_k = 0$  м/с).

### Закключение

Анализ результатов расчета показал, что данный подход не обеспечивает достаточно высоких значений вероятности обеспече-

ния мягкой посадки. Упрощение уравнений возмущенного движения некорректно, если принять во внимание возможность отклонения массы возвращаемой ступени. Расчет при детерминированном значении массы также не показал удовлетворительного результата (смотри кривые для случая 3 на рис. 2 и 3).

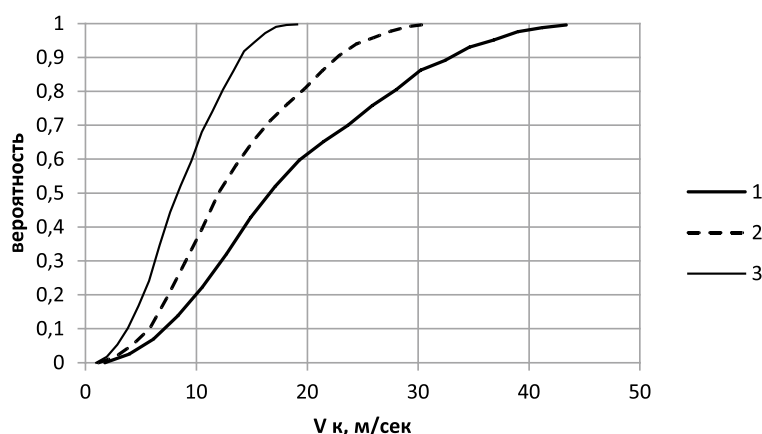


Рис. 3. Статистическая функция распределения для СВ скорости приземления: 1 – расчет без поправки на управление, 2 – с поправкой на управление по формуле (6), 3 – с поправкой на управление по формуле (6) с отсутствием разброса по массе ступени в начальный момент

Параметры распределения скорости приземления для трех рассмотренных случаев

Параметры распределения скорости приземления	$M[Vk]$ Математическое ожидание	$\sigma[Vk]$ Среднеквадратическое отклонение	$As[Vk]$ Коэффициент асимметрии	$Ex[Vk]$ Коэффициент острровершинности
1	17,4698	9,608866	0,551565	-0,52408
2	12,51425	6,494954	0,524414	-0,45485
3	8,214698	3,841363	0,269438	-0,67231

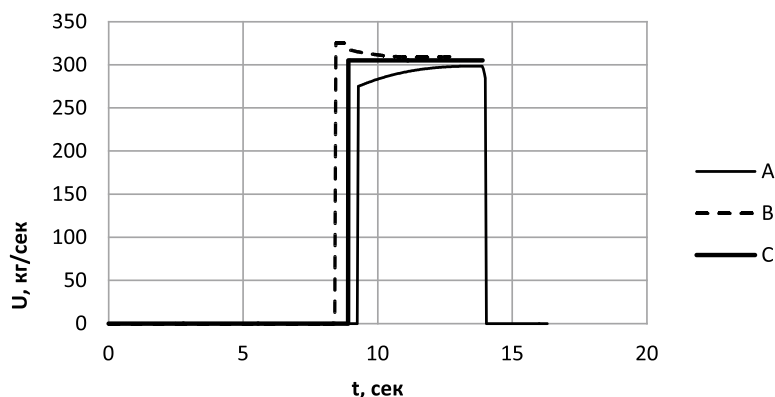


Рис. 4. Управление по времени снижения с высоты 2000 м



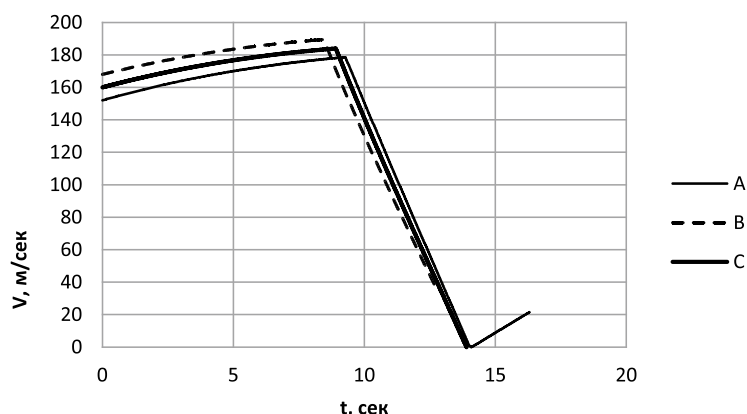


Рис. 5. Изменение скорости по времени снижения

Усложнение системы возмущенного движения и восстановление возможности учета отклонения по массе приведет либо к необходимости аналитического решения системы нелинейных алгебраических уравнений из шести уравнений для отыскания составляющих искомой матрицы  $P$ , либо к попытке численного решения этой системы, обеспечивая при этом нахождение единственного решения для положительной определенности указанной матрицы. Изменение функционала с интегрального типа на терминальный потребует решения системы ДУ Рикатти. В любом случае продолжение работы в указанных направлениях сильно увеличивает трудоемкость численного эксперимента. При этом результаты расчета для детерминированного значения массы не позволяют надеяться на получение удовлетворительного результата и в случае проведения указанной работы. Малое время работы двигателя (порядка 4 с) не позволяет воспользоваться преимуществами теории синтеза оптимального регулятора.

Кроме этого, реализация алгоритма, аналогичного предложенному Летовым в [7], показала его существенный недостаток, а именно невозможность вычисления поправки на тягу при увеличенном времени работы двигателя.

### Список литературы

1. Официальный сайт компании SpaceX. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.spacex.com/falcon9> (дата обращения: 19.08.2020).
2. Официальный сайт компании Blue origin. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.blueorigin.com> (дата обращения: 19.08.2020).
3. Мозжорина Т.Ю., Осипов В.В. Численное решение задачи о мягком приземлении методом пристрелки // Инновационное развитие. 2018. № 8 (25). С. 11–15.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 486 с.
5. Мозжорина Т.Ю. Численное решение задач оптимального управления с переключением методом пристрелки // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 2 (14). С. 94–106.
6. Мозжорина Т.Ю., Осипов В.В. Вероятностный анализ возможности мягкого приземления на последнем вертикальном участке работы двигателя // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2019. № 7. С. 136–140.
7. Летов А.М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256 с.
8. Lars Blackmore. Autonomous Precision Landing of Space Rockets. The BRIDGE. 2016. Vol. 46. No. 4. P. 15–20.
9. Жуков Б.И., Лихачев В.Н., Сихарулидзе Ю.Г., Трифонов О.В., Федотов В.П., Ярошевский В.С. Комбинированный алгоритм управления посадкой космического аппарата «Луна-Глоб» // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С. 1395–1398.
10. Жуков Б.И., Лихачев В.Н., Сазонов В.В., Сихарулидзе Ю.Г., Тучин Д.А., Федотов В.П., Ярошевский В.С. Сравнительный анализ алгоритмов управления посадкой на Луну // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 6. [Электронный ресурс]. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=25344245> (дата обращения: 19.08.2020).
11. Афанасьев В.А., Дегтярев Г.Л., Мещанов А.С., Сиразетдинов Т.К. Разработка и исследование алгоритмов управления вертикальным приземлением посадочных модулей // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2007. № 3. С. 56–59.