

## СТАТЬИ

УДК 535.41:778.38

**ВЛИЯНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ФАЗОВЫХ СРЕД НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ САМОРЕПРОДУКЦИЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕШЕТКИ****Алымкулов С.А., Исманов Ю.Х., Жумалиев К.М.***Институт физики им. академика Ж.Ж. Жээнбаева НАН Кыргызской Республики, Бишкек, e-mail: i\_yusupjan@mail.ru*

В статье рассмотрены фазовые среды типа оптический клин и тонкая линза. Аналитическая оценка проводилась исходя из факта, что для тонкого клина выполняется следующее важное условие: угол при вершине настолько мал, что можно воспользоваться приближением малых углов. Такое приближение позволяет сильно упростить вычисления, при этом практически не воздействуя на общность задачи. Было показано, что оптический клин осуществляет смещение вдоль направления оси  $x$  последовательности саморепродукций, которая формируется световым полем. Помимо этого плоскость восстановления разворачивается на некоторый угол  $\gamma$ . Переход к системе координат, которая повернута на угол  $\gamma$  относительно исходной оси, позволяет преобразовать картину восстановления, формируемую световым полем, к картине, формируемой световым полем в отсутствие оптического клина. В качестве следующего объекта, вносящего фазовые возмущения в последовательность саморепродукций, была рассмотрена тонкая линза. Для объекта типа тонкая линза аналитически показано, что для светового поля распределение за линзой подобно распределению поля в отсутствие линзы, но при этом плоскости саморепродукции сгущаются перед фокальной плоскостью и разрежаются за ней. Кроме того, перед фокальной плоскостью размеры саморепродукций уменьшаются, а за ней возрастают.

**Ключевые слова:** линейная решетка, саморепродукции, оптический клин, тонкая линза, преобразование Фурье, преобразование Френеля

**INFLUENCE OF THE SIMPLE PHASE MEDIA ON THE DISTRIBUTION OF THE SELF-REPRODUCTION PLANES OF A LINEAR GRATING****Alymkulov S.A., Ismanov Yu.Kh., Zhumaliev K.M.***Institute of Physics named after academician Z.Z. Zheenbaev of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyz Republic*

The article deals with phase media such as an optical wedge and a thin lens. The analytical assessment was carried out proceeding from the fact that for a thin wedge the following important condition is fulfilled: the angle at the vertex is so small that one can use the small angle approximation. Such an approximation allows one to greatly simplify the calculations, while practically not affecting the generality of the problem. It was shown that the optical wedge displaces along the  $x$ -axis the sequence of self-reproduction, which is formed by the light field. In addition, the plane of restoration is rotated by a certain angle. The transition to the coordinate system, which is rotated by an angle relative to the original axis, makes it possible to transform the reconstruction pattern formed by the light field to the pattern formed by the light field in the absence of an optical wedge. A thin lens was considered as the next object that introduces phase disturbances in the sequence of self-reproduction. For an object of the thin lens type, it is analytically shown that for a light field, the distribution behind the lens is similar to the distribution of the field in the absence of a lens, but, at the same time, the self-reproduction planes are condensed in front of the focal plane and are rarefied behind it. In addition, in front of the focal plane, the sizes of self-reproduction decrease, and behind it, they increase.

**Keywords:** linear grating, self-reproduction, optical wedge, thin lens, Fourier transform, Fresnel transform

Эффект безлинзового формирования изображений периодических структур впервые был зарегистрирован Тальботом в 1836 г. [1]. В современных исследованиях рассмотрены различные аспекты явления формирования саморепродукций периодическими объектами.

Рассмотрение условий возникновения явления саморепродуцирования в предельно общем случае косоугольной элементарной ячейки, заключающейся произвольный по функции прозрачности объект, дано в [2–4]. Для описания транспаранта, состоящего из ячеек подобного типа, авторы исходили из того, что ряд Фурье определенной в огра-

ниченном интервале функции, вне области ее определения, дает бесконечное количество регулярных повторений этой функции. То есть ряд Фурье ведет себя как оператор размножения. Используя это свойство ряда Фурье, можно описать пространственно-регулярный двумерный транспарант, состоящий из бесконечной совокупности идентичных прямоугольных ячеек.

Явление саморепродуцирования при наклонном освещении рассмотрено в [5]. В работе исследованы закономерности формирования дифракционных картин за одномерными и двумерными периодическими транспарантами, освещен-

ными наклонным пучком когерентного света. Выяснены условия наблюдения явления саморепродуцирования на объектах конечного размера.

В работах [6–8] с общих позиций теории образования изображений при когерентном и некогерентном освещении рассмотрен процесс образования изображения в явлении саморепродуцирования при освещении объекта излучением с модулированной пространственной когерентностью. Модуляция пространственной когерентности позволяет использовать излучение от широкофокусных источников с широким спектром. Сообщается о результатах по наблюдению фурье-изображений в мягком рентгеновском излучении, полученном с помощью источника синхротронного излучения. Рассмотрены дисперсионные свойства явления саморепродуцирования. Приведены экспериментальные результаты и расчетные кривые спектрометрических исследований.

Явление саморепродуцирования обычно наблюдают при освещении решетки плоской волной, т.е. при падении на решетку коллимированного пучка света. Исследование явления саморепродуцирования в случае произвольного волнового фронта проведено в [9, 10]. Получены обобщенные решения на базе дифракционной теории в приближении Френеля. Подробно исследован случай гауссиановского пучка. Показано, что типичный пример явления саморепродуцирования существует и в этом случае.

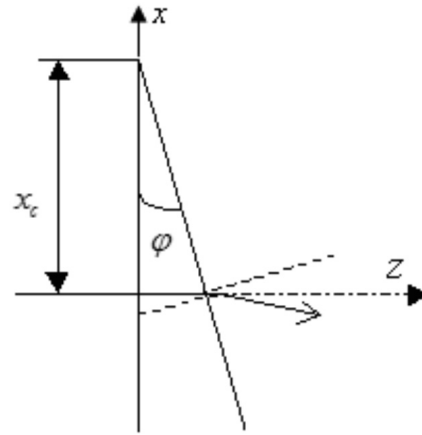
Важным моментом в исследованиях явления саморепродуцирования является учет влияния различных фазовых сред на распределение саморепродукций.

Целью данной работы является анализ воздействия некоторых простейших фазовых сред на распределение плоскостей саморепродукций линейной решетки.

### *Последовательность саморепродукций в простейших фазовых средах*

Рассмотрим простейшие фазовые среды, такие как оптический клин и тонкая линза. Для оптического клина фазовые возмущения светового поля можно представить в виде [11, 12]

$$\sigma_c = k\gamma x_c, \quad \text{где } \gamma = (n-1)tg\varphi, \quad (1)$$



*Схема возникновения фазовых искажений при прохождении световой волны сквозь оптический клин*

здесь  $\varphi$  – угол при вершине тонкого клина (рисунок). Важно отметить, что для тонкого клина выполняется следующее важное условие: угол при вершине настолько мал, что можно воспользоваться приближением малых углов. Такое приближение позволяет сильно упростить вычисления, при этом практически не воздействуя на общность задачи.

Световое поле после оптического клина имеет вид

$$V_c(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[i\left(kz - \frac{\pi}{4}\right)\right] \exp\left(-2\pi i \gamma^2 \frac{z - z_2}{2\lambda}\right) \sum_{m=-K}^K b_m \exp\left\{2\pi i \left[\frac{m}{d} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \left[x - \gamma(z - z_2)\right] + \frac{\gamma}{\lambda} x - \frac{m^2 \lambda z}{2d^2}\right]\right\} \left\{ Fr \left[ \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left[ b - x + (z - z_2) \gamma + \frac{m \lambda z}{d} \right] \right] - \right. \\ \left. - Fr \left[ \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left[ -b - x + (z - z_2) \gamma + \frac{m \lambda z}{d} \right] \right] \right\} \left\{ Fr \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} (b - y) \right] - Fr \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} (-b - y) \right] \right\}. \quad (2)$$

Соотношение (2) показывает, что оптический клин осуществляет смещение вдоль направления оси  $x$  последовательности саморепродукций, которая формируется световым полем. Помимо этого плоскость восстановления разворачивается на угол  $\gamma$ . Переход к системе координат, которая повернута на угол  $\gamma$  относительно оси, позволяет преобразовать картину восстановления, формируемую световым полем, к картине, формируемой световым полем в отсутствии оптического клина.

Далее рассмотрим объект типа тонкая линза [13] в качестве объекта, вносящего фазовые возмущения в последовательность саморепродукций. В соответствии с [14, 15] фазовое воздействие, осуществляемое тонкой линзой, можно записать в следующем виде:

$$\sigma_L = k \left[ n\delta - (x_2^2 + y_2^2)/2f \right], \quad (3)$$

здесь  $\delta$  – толщина линзы вдоль её оптической оси,  $f$  – фокусное расстояние линзы. Световое поле за тонкой линзой можно записать в следующем виде:

$$V_L(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{2i\lambda z} \int_{-b}^b \int_{-b}^b \sum_{m=-M}^K b_m \exp\left(i \frac{2\pi x_2 m}{d}\right) \exp\left\{ ik \left[ n\delta - \frac{(x_2^2 + y_2^2)}{2f} \right] \right\} \times \exp\left\{ i \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_2) + (y - y_2)]^2 \right\} dx_2 dy_2. \quad (4)$$

Рассмотрим интеграл (4) как преобразование Фурье:

$$V_L(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{2i\lambda z} \exp(ikn\delta) \exp\left[ i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \int_{-b}^b \int_{-b}^b \sum_{m=-K}^K b_m \exp\left( i \frac{2\pi x_2 m}{d} \right) \times \exp\left( -i \frac{\pi(x_2^2 + y_2^2)}{\lambda f} \right) \exp\left[ i \frac{\pi}{\lambda z} (x_2^2 + y_2^2) \right] \exp\left[ -i \frac{2\pi}{\lambda z} (xx_2 + yy_2) \right] dx_2 dy_2. \quad (5)$$

После внесения интеграла под знак суммирования получаем

$$V_L(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{2i\lambda z} \exp(ikn\delta) \exp\left[ i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \sum_{m=-K}^K \int_{-b}^b b_m \exp\left( i \frac{2x_2 \pi m}{d} \right) \times \exp\left[ i \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right) x_2^2 \right] \exp\left( -i \frac{2\pi}{z\lambda} x x_2 \right) dx_2 \int_{-b}^b \exp\left[ -i \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right) y_2^2 \right] \exp\left( -i \frac{2\pi}{\lambda z} y y_2 \right) dy_2. \quad (6)$$

Перейдем к интегралу по переменной  $y_2$ . Изменим этот интеграл с целью упрощения, сделав замену следующим образом:

$$\tau = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right); \quad \mu = \frac{y}{\lambda z}; \quad \vartheta = 2\pi\mu. \quad (7)$$

Представим этот интеграл, обозначив его буквой D, в следующем виде:

$$D = \int_{-b}^b \exp(i\tau y_2^2) \exp(-i\vartheta y_2) dy_2. \quad (8)$$

Интеграл (8) можно представить в виде

$$D = \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} \exp\left( i \frac{\pi}{4} \right) \exp\left[ -\frac{i\vartheta^2}{(4\tau)} \right] \left[ Fr\left( b\sqrt{\tau - \frac{\vartheta}{2\sqrt{\tau}}} \right) - Fr\left( -b\sqrt{\tau - \frac{\vartheta}{2\sqrt{\tau}}} \right) \right]. \quad (9)$$

Возвращаясь к начальным переменным, имеем следующее соотношение:

$$D = \sqrt{\frac{\lambda}{2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)}} \exp\left( i \frac{\pi}{4} \right) \exp\left( -i \frac{\pi y^2}{\lambda z} \cdot \frac{f}{f-z} \right) \left[ Fr\left( b\sqrt{\frac{\pi(f-z)}{f\lambda z}} - \sqrt{\frac{f\pi}{(f-z)\lambda z}} y \right) - Fr\left( -b\sqrt{\frac{\pi(f-z)}{f\lambda z}} - \sqrt{\frac{f\pi}{(f-z)\lambda z}} y \right) \right]. \quad (10)$$

В случае интеграла по переменной  $x_2$ , принимая во внимание то, что в данном случае мы реализуем Фурье-преобразование функции  $\exp(i\tau x_2^2) \exp\left(i\frac{2\pi m x_2}{d}\right)$ , выражение для результата интегрирования получаем в следующем виде:

$$E = b_m \sqrt{\frac{\pi}{2\tau}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left[-i\left(\vartheta - \frac{2m\pi}{d}\right)^2 / (4\tau)\right] \left[ Fr\left(b\sqrt{\tau} - \vartheta - \frac{2\pi m}{d} / 2\sqrt{\tau}\right) - Fr\left(-b\sqrt{\tau} - \vartheta - \frac{2\pi m}{d} / 2\sqrt{\tau}\right) \right], \quad (11)$$

где  $\tau$ ,  $\mu$ ,  $\vartheta$  такие же, как и в (7).

После возврата к начальным переменным имеем следующее выражение для  $E$ :

$$\begin{aligned} E &= b_m \sqrt{\frac{zf\lambda}{2(f-z)}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left\{-i\left(\frac{4\pi^2 x^2}{\lambda^2 z^2} - \frac{8\pi^2 mx}{zd\lambda} + \frac{4\pi^2 m^2}{d^2}\right) / \left[\frac{4\pi(f-z)}{zf\lambda}\right]\right\} \times \\ &\times \left[ Fr\left(b\sqrt{\frac{(f-z)\pi}{zf\lambda}} - \frac{\frac{x\pi}{z\lambda} - \frac{m\pi}{d}}{\sqrt{\frac{(f-z)\pi}{zf\lambda}}}\right) - Fr\left(-b\sqrt{\frac{(f-z)\lambda}{zf\lambda}} - \frac{\frac{x\pi}{z\lambda} - \frac{m\pi}{d}}{\sqrt{\frac{(\lambda-z)\pi}{zf\lambda}}}\right) \right] = \\ &= b_m \sqrt{\frac{zf\lambda}{2(f-z)}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left[-i\frac{f}{f-z}\left(\frac{\pi}{z\lambda}x^2 - \frac{2\pi m}{d}x + \frac{\pi m^2 \lambda}{d^2}z\right)\right] \times \\ &\times \left[ Fr\left(b\sqrt{\frac{\pi(f-z)}{zf\lambda}} - \sqrt{\frac{f\pi}{z\lambda(f-z)}}x + \sqrt{\frac{f\pi}{\lambda z(f-z)}}\frac{zm\lambda}{d} - Fr\left(-b\sqrt{\frac{\pi(f-z)}{zf\lambda}} - \sqrt{\frac{\pi f}{\lambda z(f-z)}}x + \sqrt{\frac{f\pi}{\lambda z(f-z)}}\frac{mz\lambda}{d}\right) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Введем новые переменные

$$zz = \frac{fz}{f-z}; \quad zd = \frac{d(f-z)}{f}. \quad (13)$$

Окончательное выражение для значения интеграла (6) имеет вид

$$\begin{aligned} V_L(x, y, z) &= \frac{f}{4(f-z)} \exp(ikz) \exp(ikn\delta) \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda}(x^2 + y^2)\right] \left\{ Fr\left[\sqrt{\frac{\pi}{zz\lambda}}\left(b - \frac{d}{zd}y\right)\right] - \right. \\ &\quad \left. - Fr\left[\sqrt{\frac{\pi}{zz\lambda}}\left(-b - \frac{d}{zd}y\right)\right] \right\} \sum_{m=-K}^K b_m \exp\left[2\pi i\left(\frac{m}{zd}x - \frac{m^2\lambda}{2d^2}zz\right)\right] \times \\ &\quad \times \left\{ Fr\left[\sqrt{\frac{\pi}{zz\lambda}}\left(b - \frac{d}{zd}x + \frac{mzz\lambda}{d}\right)\right] - Fr\left[\sqrt{\frac{\pi}{zz\lambda}}\left(-b - \frac{d}{zd}x + \frac{mzz\lambda}{d}\right)\right] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Из (14) можно видеть, что для светового поля распределение за линзой подобно распределению поля в отсутствии линзы, однако период саморепродуцирования светового поля в рассматриваемом случае задается выражением (13) для  $zd$ .

Обозначив  $\frac{zz\lambda}{2d^2} = s$ , можно представить соотношение для определения плоскостей саморепродукции в следующем виде:

$$\frac{1}{z_c} = \frac{1}{2d^2 s/\lambda} + \frac{1}{f}. \quad (15)$$

Из выражения (15) видно, что плоскости саморепродукции сгущаются перед фокальной плоскостью и разрежаются за ней. Масштаб саморепродукций подчиняется соотношению (13) для  $zd$ . Из (13) видно, что перед фокальной плоскостью размеры саморепродукций уменьшаются, а за ней возрастают.

### Выводы

Рассмотрены фазовые среды типа оптический клин и тонкая линза. Показано, что оптический клин осуществляет смещение вдоль направления оси  $x$  последовательности саморепродукций, которая формируется световым полем. Помимо этого плоскость восстановления разворачивается на некоторый угол  $\gamma$ . Переход к системе координат, которая повернута на угол  $\gamma$  относительно исходной оси, позволяет преобразовать картину восстановления, формируемую световым полем, к картине, формируемой световым полем в отсутствие оптического клина.

Для объекта типа тонкая линза аналитически показано, что для светового поля распределение за линзой подобно распределению поля в отсутствие линзы, но при этом плоскости саморепродукции сгущаются перед фокальной плоскостью и разрежаются за ней. Кроме того, перед фокальной плоскостью размеры саморепродукций уменьшаются, а за ней возрастают.

### Список литературы

1. Talbot H.F. Facts relating to optical science. *Phil. Mag.* 1836. Ser. 3. Vol. 9. Issue 56. P. 401–407.

2. Wen J., Zhang Y., Xiao M. The Talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics. *Advances in Optics and Photonics.* 2013. Vol. 5. Issue 1. P. 83–130. DOI: 10.1364/AOP.5.000083.

3. Guillet de Chatellus H., Lacot E., Hugon O., Jacquin O., Khebbache N. and Azaña J. Phases of Talbot patterns in angular self-imaging. *Journal of the Optical Society of America A.* 2015. Vol. 32. Issue 6. P. 1132–1139. DOI: 10.1364/JOSAA.32.001132.

4. Schnébelin C., Guillet de Chatellus H. Spectral interpretation of Talbot self-healing effect and application to optical arbitrary waveform generation. *Optics Letters.* 2018. Vol. 43. Issue 7. P. 1467–1470. DOI: 10.1364/OL.43.001467.

5. Hector S.D., Swanson G.J. Shared aperture for two beams of different wavelength using reflective phase gratings and the Talbot effect. *Applied Optics.* 1992. Vol. 31. Issue 34. P. 7267–7276. DOI: 10.1364/AO.31.007267.

6. Fernández-Pousa C.R. On the structure of quadratic Gauss sums in the Talbot effect. *Journal of the Optical Society of America A.* 2017. Vol. 34. Issue 5. P. 732–742. DOI: 10.1364/JOSAA.34.000732.

7. Zhou P. and Burge J.H. Analysis of wavefront propagation using the Talbot effect. *Applied Optics.* 2010. Vol. 49. Issue 28. P. 5351–5359. DOI: 10.1364/AO.49.005351.

8. Schnebelin C., Guillet de Chatellus H. Fractional Fourier transform-based description of the Talbot effect: application to analog signal processing. *Applied Optics.* 2017. Vol. 56. Issue 1. P. A62–A68. DOI: 10.1364/AO.56.000A62.

9. Wen J., Zhang Y., Zhu S.-N., Xiao M. Theory of nonlinear Talbot effect. *Journal of the Optical Society of America B.* 2011. Vol. 28. Issue 2. P. 275–280. DOI: 10.1364/JOSAB.28.000275.

10. Kim M.-S., Scharf T., Menzel C., Rockstuhl C., Hertzog H.P. Talbot images of wavelength-scale amplitude gratings. *Optics Express.* 2012. Vol. 20. Issue 5. P. 4903–4920. DOI: 10.1364/OE.20.004903.

11. Исманов Ю.Х., Жумалиев К.М., Алымкулов С.А. Особенности голограмм регулярных объектов // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2020. № 4. С. 73–77.

12. Исманов Ю.Х. Интерферометрия на основе метода бесчелевой радужной голографии // *Вестник КГУСТА.* 2015. № 4 (40). С. 194–198.

13. Исманов Ю.Х. Голографическая интерферометрия на основе эффекта Тальбота // *Известия Национальной Академии наук Кыргызской Республики.* 2015. № 2. С. 20–23.

14. Исманов Ю.Х., Алымкулов С.А. Саморепродуцирование регулярных объектов с ограниченной апертурой // *Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана.* 2015. № 7. С. 3–5.

15. Maripov A., Ismanov Y. The Talbot effect (a self-imaging phenomenon) in holography. *Journal of Optics (0150-536X).* 1994. V. 25. No. 1. P. 3–8. DOI: 10.1088/0150-536X/25/1/001.