УДК 532.516

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОТСУТСТВИЕ ВЫДЕЛЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Сенницкий В.Л.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: sennitskii@yandex.ru

Поставлена и решена задача о движении вязкой жидкости в присутствии твердых тел – двух стенок и свободной тонкой проницаемой для жидкости пластины – при периодических по времени воздействиях. Постановка задачи включает в себя уравнение движения пластины, уравнения Навье – Стокса и неразрывности и условия на твердых границах жидкости (условия на границах твердых тел). Установлено наличие эффекта, состоящего в том, что гидромеханическая система, подвергающаяся периодическим по времени воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, производит однонаправленные отклики (реакции на воздействия), выражающиеся в том, что свободные части системы – в частности, жидкие слои – на фоне колебаний совершают однонаправленное, стационарное движение. Сформулирован обобщенный принцип среднего движения. Периодические по времени (колебательные, вибрационные) воздействия присутствуют практически повсеместно. Ввиду этого исследованиями динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях определяется одна из неизменно актуальных областей в механике жидкости. Уже проведенные к настоящему времени исследования позволили обнаружить ряд новых гидромеханических эффектов. Периодические по времени воздействия могут приводить к выполнению свободными частями гидромеханических систем заданного движения, могут использоваться как средство управления гидромеханическими системами. Результаты исследований в данной области представляют как самостоятельный интерес, так и существенный интерес в связи с возможностью применения их при разработке подходов к решению актуальных проблем прикладного характера. Результаты, полученные в настоящей работе, могут найти применение, в частности, в исследованиях нетривиальной динамики гидромеханических систем, использоваться при создании устройств, гидромеханических систем, обладающих заданными свойствами, например систем, заданным образом реагирующих на колебательные воздействия; полученные результаты могут служить теоретической основой для проведения направленных экспериментальных исследований движения жидкости в рассмотренных и аналогичных им гидромеханических условиях.

Ключевые слова: вязкая жидкость, периодические по времени воздействия, отсутствие выделенного направления в пространстве, однонаправленное стационарное движение

ON THE MOTION OF A VISCOUS LIQUID IN THE ABSENCE OF A PREDOMINANT DIRECTION IN SPACE

Sennitskiy V.L.

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk;
Novosibursk State Universuty, Novosibirsk, e-mail: sennitskii@yandex.ru

The problem is formulated and solved on the motion of a viscous liquid in the presence of solid bodies – two walls and a free thin plate which is permeable for a liquid – under periodical in time influences. The formulation of the problem includes the equation of the plate motion, the equations of Navier–Stokes and a continuity and the conditions at the solid boundaries of the liquid (the conditions at the boundaries of the solid bodies). The effect is revealed which consists in that a hydro-mechanical system which undergoes by periodical in time influences having no predominant direction in space produces the unidirectional responses (the reactions for the influences) which expresses in that the free parts of the system – in particular the liquid layers – at a background of oscillations perform the unidirectional, steady motion. The generalized principle of average motion is formulated. Periodical in time (oscillatory, vibrational) influences are practically everywhere. By this reason the investigations of the dynamics of hydro-mechanical systems under periodical in time influences define one of invariably actual fields in fluid mechanics. The investigations which have been realized to the present time allowed to reveal a series of new hydro-mechanical effects. Periodical in time influences can drive free parts of a hydro-mechanical system to fulfill a prescribed motion, they can be used as the means for controlling hydro-mechanical systems. The results of investigations in the given field are of their independent interest as well as of their essential interest in connection with the possibility of the use of them under the elaboration of approaches to solving actual problems of an applied character. The results obtained in the present work can find their use in particular for investigations of non-trivial dynamics of hydro-mechanical systems, can be used under a creation of devices, hydro-mechanical systems which have prescribed characteristics for example systems that respond for oscillatory influences by a prescribed manner; the obtained results can be the theoretical base for the realization of directional experimental investigations of the liquid motion at the considered and analogous to them hydro-mechanical conditions.

Keywords: viscous liquid, periodical in time influences, absence of predominant direction in space, unidirectional steady motion

Изучение задач, связанных с движением вязкой жидкости в различных гидромеханических условиях, осуществляется на протяжении длительного времени с неизменным сохранением актуальности [1–3]. В частности, выполняются исследования,

направленные на выявление эффектов среднего движения жидкости, подвергающейся периодическим по времени (колебательным, вибрационным) воздействиям ([4, 5] и представленная в этих источниках литература). В настоящей работе поставлена и решена новая задача о движении вязкой жидкости, обусловленной колебательными воздействиями на жидкость, характеризующимися отсутствием выделенного направления в пространстве. Жидкость контактирует с абсолютно твердыми стенками W_1, W_2 и пластиной Ξ. Стенки совершают заданные колебания вдоль оси Y инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Стенка W_1 ограничена плоскостью $Y = A_1$, стенка W_2 – плоскостью $Y = A_2$. Толщина пластины пренебрежимо мала (равна нулю); пластина находится в плоскости $Y = B$ ($A_1 < B < A_2$; B – постоянная). Промежутки между стенками и пластиной – области $\Omega_1 : A_1 < Y < B$ и $\Omega_2 : B < Y < A_2$ ($-\infty < X < \infty$, $-\infty < Z < \infty$) – заполнены жидкостью. Расстояние между стенками $L = A_2 - A_1$ постоянно. Пластина проницаема для жидкости; пластина движется вдоль оси X под действием внешних колебательных сил и сил со стороны жидкости.

Целью работы является определение не зависящего от начальных данных периодического по времени t движения жидкости.

Постановка и решение задачи

Пусть T – период колебаний стенок W_1, W_2; $\tau = t / T$; $x = X / L$; $y = Y / L$; $z = Z / L$; $A_1 = \hat{A}\sin 2\pi\tau$ ($\hat{A} > 0$ – постоянная); $\varepsilon = \hat{A}/L$; $a_1 = A_1 / L$; $a_2 = A_2 / L$; $b = B/L$; ξ – часть пластины Ξ длиной D_X, «вписанная» между плоскостями $Z = Z^*$ и $Z = Z^* + D_Z$ (Z^*, $D_X > 0$, $D_Z > 0$ – постоянные); m – масса тела ξ; $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$ $\mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$; $\mathbf{U} = \{U, 0, 0\}$ – скорость тела ξ (пластины Ξ); $u = TU / L$; ρ, ν, $\mathbf{V} = \{V_X, V_Y, 0\}$ – соответственно плотность, кинематический коэффициент вязкости и скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/L$ ($\mathbf{v} = \{v_x, v_y, 0\} = \mathbf{v}(y, \tau)$); P – давление в жидкости; $p = T^2P / (\rho L^2)$ $(p = p(y, \tau))$; $\mathrm{Re} = L^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса; $F_{ext} = \hat{F}\sin(2\pi\tau + \varphi)$ – внешняя сила, действующая на тело ξ в направлении оси X ($\hat{F} > 0$, φ – постоянные); $f_{ext} = T^2 F_{ext} / (mL)$; $F_{liq} = \rho\nu\left[(\partial V_X/\partial Y)_{|Y=B+0} - (\partial V_X/\partial Y)_{|Y=B-0}\right] D_X D_Z$ – сила, действующая со стороны жидкости на тело ξ в направлении оси X; $f_{liq} = T^2 F_{liq} / (mL)$.

Постановка задачи включает в себя уравнение движения тела ξ (пластины Ξ), уравнения Навье – Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на границах тел W_1, W_2, Ξ:

$$\frac{du}{d\tau} = f_{ext} + f_{liq}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} \text{ в } \Omega_1, \Omega_2; \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega_1, \Omega_2; \tag{3}$$

$$\mathbf{v} = \frac{da_1}{d\tau}\mathbf{e}_y \text{ при } y = a_1, y = 1 + a_1; \tag{4}$$

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + \frac{da_1}{d\tau}\mathbf{e}_y \text{ при } y = b - 0, y = b + 0. \tag{5}$$

Из (3)–(5) следует

$$v_y = 2\pi\varepsilon\cos 2\pi\tau \text{ при } a_1 \le y \le b - 0, b + 0 \le y \le a_2. \tag{6}$$

Согласно (2), (4)–(6) имеем

$$p = 4\pi^2\varepsilon(\sin 2\pi\tau)\, y + p' \text{ при } a_1 < y < b,$$

$$p = 4\pi^2\varepsilon(\sin 2\pi\tau)\, y + p'' \text{ при } b < y < a_2 \tag{7}$$

(p', p'' – функции τ);

$$\frac{\partial v_x}{\partial \hat{o}} + 2\pi\varepsilon\left(\cos 2\pi\tau\right)\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \text{ в } \Omega_1, \Omega_2; \tag{8}$$

$$v_x = 0 \text{ при } y = a_1,\ y = 1 + a_1; \tag{9}$$

$$v_x = u \text{ при } y = b - 0,\ y = b + 0. \tag{10}$$

Будем рассматривать задачу (1), (8)–(10) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Предположим, что

$$u \sim u_0 + \varepsilon u_1,\ v_x \sim v_{x0} + \varepsilon v_{x1} \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{11}$$

Пусть N = 0, 1 – номер приближения (степень ε).
Используя (1), (8)–(11), получим

$$\frac{du_N}{d\tau} = \left(1 - N\right) f_{ext} + f_{liq\,N}; \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_{xN}}{\partial \hat{o}} + 2N\pi\left(\cos 2\pi\tau\right)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_{xN}}{\partial y^2} \text{ в } \bar{\Omega}_1,\ \bar{\Omega}_2; \tag{13}$$

$$v_{xN} = -N\left(\sin 2\pi\tau\right)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \text{ при } y = 0,\ y = 1; \tag{14}$$

$$v_{xN} = u_N \text{ при } y = b - 0,\ y = b + 0. \tag{15}$$

Здесь $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ – области соответственно $0 < y < b$ и $b < y < 1$ $(-\infty < x < \infty, -\infty < z < \infty)$;

$$f_{liq\,N} = \frac{\varkappa}{Re}\left(\frac{\partial v_{xN}}{\partial y}\Big|_{y=b+0} - \frac{\partial v_{xN}}{\partial y}\Big|_{y=b-0}\right)$$

$\left(\varkappa = \rho L D_X D_Z / m\right)$.

Пусть N = 0.
Задача (12)–(15) имеет решение

$$u_0 = \mathrm{Real}\left(\hat{u}\, e^{2\pi i\tau}\right) \tag{16}$$

$$\left(\hat{u} = -\frac{\hat{f}\, e^{i\varphi}}{2\pi\left\{1 + \frac{\varkappa}{\lambda}\left[\mathrm{cth}\,\lambda b + \mathrm{cth}\,\lambda\left(1 - b\right)\right]\right\}}\right);$$

$$v_{x0} = \mathrm{Real}\left(\hat{u}\frac{\mathrm{sh}\,\lambda y}{\mathrm{sh}\,\lambda b}\, e^{2\pi i\tau}\right) \text{ при } 0 \le y \le b; \tag{17}$$

$$v_{x0} = \mathrm{Real}\left[\hat{u}\frac{\mathrm{sh}\,\lambda\left(1 - y\right)}{\mathrm{sh}\,\lambda\left(1 - b\right)}\, e^{2\pi i\tau}\right] \text{ при } b \le y \le 1, \tag{18}$$

где $\hat{f} = T^2\hat{F}/\left(mL\right)$; $\lambda = \left(1 + i\right)\sqrt{\pi Re}$.

Пусть N = 1.

Из (12)–(15) следует

$$\frac{d\overline{v}}{dy}\Big|_{y=b+0} - \frac{d\overline{v}}{dy}\Big|_{y=b-0} = 0; \tag{19}$$

$$2\pi\left\langle\left(\cos 2\pi\tau\right)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y}\right\rangle = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\overline{v}}{dy^2} \text{ в } \overline{\Omega}_1,\ \overline{\Omega}_2; \tag{20}$$

$$\overline{v} = -\left\langle\left(\sin 2\pi\tau\right)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y}\right\rangle \text{ при } y = 0,\ y = 1; \tag{21}$$

$$\overline{v} = \overline{u} \text{ при } y = b - 0, y = b + 0. \tag{22}$$

Здесь $\langle\ldots\rangle = \int\limits_{\tau}^{\tau+1}\ldots d\tau'$; $\overline{u} = \langle u_1\rangle$; $\overline{v} = \langle v_{x1}\rangle$.

Задача (12)–(15) имеет решение

$$u_1 = \overline{u} + \mathrm{Real}\left(\tilde{u}e^{4\pi i\tau}\right),$$

$$v_{x1} = \overline{v} + \mathrm{Real}\left(\tilde{v}_1 e^{4\pi i\tau}\right) \text{ при } 0 \le y \le b,$$

$$v_{x1} = \overline{v} + \mathrm{Real}\left(\tilde{v}_2 e^{4\pi i\tau}\right) \text{ при } b \le y \le 1, \tag{23}$$

где $\tilde{u}$ – постоянная; $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ – функции y.

Используя (16)–(22), найдем

$$\overline{u} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Imag}\left\{\lambda\hat{u}\left[b\ \mathrm{cth}\ \lambda(1-b) - (1-b)\ \mathrm{cth}\ \lambda b\right]\right\}; \tag{24}$$

$$\overline{v} = \pi\mathrm{Re}\ \mathrm{Real}\left[\hat{u}\frac{\mathrm{ch}\ \lambda y - (\mathrm{ch}\ \lambda b)\ b^{-1}y}{\lambda\,\mathrm{sh}\ \lambda b}\right] + \overline{u}\frac{y}{b} \text{ при } 0 \le y \le b; \tag{25}$$

$$\overline{v} = -\pi\ \mathrm{Re}\ \mathrm{Real}\left[\hat{u}\frac{\mathrm{ch}\ \lambda(1-y) - (\mathrm{ch}\ \lambda(1-b))\,(1-b)^{-1}\,(1-y)}{\lambda\ \mathrm{sh}\ \lambda(1-b)}\right] + \overline{u}\frac{1-y}{1-b} \text{ при } b \le y \le 1. \tag{26}$$

Формулами

$$u = u_0 + \varepsilon u_1,\ v_x = v_{x0} + \varepsilon v_{x1} \tag{27}$$

и (6), (7), (16)–(18), (23)–(26) определяется приближенное решение задачи (1)–(5). Из этого решения, в частности, следует, что жидкость (на фоне колебаний) совершает стационарное, прямолинейное движение. Отметим, что при b = 1/2 пластина Ξ (на фоне колебаний) неподвижна.

Остановимся на вопросе о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях Re.

Используя (6), (16)–(18), (23)–(27), получим

$$\langle u\rangle = \varepsilon\overline{u} \sim (2b-1)Q,$$

$$\langle\mathbf{v}\rangle = \varepsilon\overline{v}\mathbf{e}_x \sim Q(y+b-1)\mathbf{e}_x\ (0 \le y \le 1) \text{ при } \mathrm{Re} \to 0, \tag{28}$$

где $Q = \dfrac{\varepsilon\,\hat{f}}{2\varkappa}(\cos\varphi)\ \mathrm{Re}$.

Согласно (28) (на фоне колебаний, для $Q \neq 0$) имеет место следующее. При $b > 1/2$ ($b < 1$) в области $\overline{\Omega}_1$ присутствуют два слоя, определяемые соотношениями $0 < y < 1 - b$ (слой l_1) и $1 - b < y < b$, в которых жидкость движется во взаимно противоположных направлениях, причем направление движения жидкости в слое l_1 противоположно направлению движения пластины Ξ; в области $\overline{\Omega}_2$ (в слое $b < y < 1$) жидкость движется в одном направлении, которое совпадает с направлением движения пластины Ξ. Отметим, что толщина слоя l_1 равна «толщине» области $\overline{\Omega}_2$. При $b < 1/2$ ($b > 0$ в области $\overline{\Omega}_2$ присутствуют два слоя, определяемые соотношениями $b < y < 1 - b$ и $1 - b < y < 1$ (слой l_2), в которых жидкость движется во взаимно противоположных направлениях, причем направление движения жидкости в слое l_2 противоположно направлению движения пластины Ξ; в области $\overline{\Omega}_1$ (в слое $0 < y < b$) жидкость движется в одном направлении, которое совпадает с направлением движения пластины Ξ. Отметим, что толщина слоя l_2 равна «толщине» области $\overline{\Omega}_1$. При $b = 1/2$ пластина Ξ неподвижна; жидкость в каждой из областей $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ движется в одном направлении, и эти направления взаимно противоположны.

Отметим, что (при $Q \neq 0$) среднее по времени движение жидких слоев происходит при любом положении пластины между стенками.

Заключение

Представленное в настоящей работе свидетельствует о том, что жидкость в рассмотренных условиях совершает движение в выделенном направлении, вызываемое и поддерживаемое оказываемыми на жидкость воздействиями, не имеющими выделенного направления в пространстве. Происходит «порождение порядка из хаоса». Причина данного эффекта состоит в согласованности (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения [6], который в обобщенном виде может быть сформулирован следующим образом.

Основополагающей причиной среднего по времени движения свободных частей гидромеханической системы (частей системы, движение которых не задано) при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях на систему, не имеющих выделенного направления в пространстве, является возможность совершения свободными частями системы движения в различных направлениях в пространстве в неодинаковых условиях.

Результаты, полученные в настоящей работе, в частности, могут служить теоретической основой для проведения направленных экспериментальных исследований движения жидкости в рассмотренных и аналогичных им гидромеханических условиях.

Список литературы

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 520 с.

2. Всероссийская конференция с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Россия, Новосибирск, 4–8 сентября 2017). Тезисы докладов. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2017. 298 с.

3. Международная конференция «Математика в приложениях» (Россия, Новосибирск, 4–10 августа 2019). Тезисы докладов. Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2019. 312 с.

4. Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Россия, Новосибирск, 7–11 сентября 2020). Тезисы докладов. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2020. 262 с.

5. Sennitskiy V.L. Predominantly unidirectional rotation of a viscous liquid with a free boundary // Thermophysics and Aeromechanics. 2020. Vol. 27. No. 1. P. 157–160. DOI: 10.1134/S0869864320010175.

6. Сенницкий В.Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 1. С. 57–62.