УДК 514

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Черкасова Е.Ю.

ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, e-mail: elena030358@mail.ru

Проведенные в последнее время исследования показали, что вычислительная графика, или компьютерная начертательная геометрия, позволяет расширить арсенал решаемых инженерных задач. В целях расширения области применения данной науки в работе особое внимание уделяется методике ее применения. Особенность состоит в том, что используемый графический редактор вносит дополнительные возможности метода. Прежде всего, это точность, под которой надо понимать не только число знаков в ответе, но и подтверждение новых методических изысканий. С другой стороны, это чисто компьютерные сведения. Так, заложенный в программу математический аппарат позволяет не только изобразить произвольную кривую, но и измерить ее параметры. Компьютерное распрямление циркульной кривой позволяет измерять площади поверхностей вращения, лежащих в основе метода двухкоординатной развертки. Главное внимание в работе посвящено изложению методик решения задач, включая известные, которые позволяют получить не только достаточно точный численный ответ, но и некоторые дополнительные сведения. В частности, это графический метод решения системы трех уравнений с тремя неизвестными, стереометрическое исследование пирамиды, мало используемый в начертательной геометрии метод координационных сфер и другие.

Ключевые слова: компьютерная начертательная геометрия, аналитическая геометрия, теоретическая механика, алгебра, стереометрия, решение задач, графический редактор КОМПАС- 3D

METHODOLOGICAL BASIS OF COMPUTER DESIGN GEOMETRY

Cherkasova E.Yu.

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, e-mail: elena030358@mail.ru

Recent studies have shown that computational graphics or computer descriptive geometry can expand the arsenal of engineering problems to be solved. In order to expand the field of application of this science in the work, special attention is paid to the methodology of its application. The peculiarity is that the used graphic editor introduces additional capabilities of the method. First of all, this is accuracy, by which one should understand not only the number of characters in the answer, but also the confirmation of new methodological research. On the other hand, this is purely computer information. Thus, the mathematical apparatus included in the program allows not only to depict an arbitrary curve, but also to measure its parameters. Computer straightening of the circular curve allows you to measure the areas of surfaces of revolution, which are the basis of the two-coordinate sweep method. The main attention in the work is devoted to the presentation of methods for solving problems, including the known ones, which make it possible to obtain not only a sufficiently accurate numerical answer, but also some additional information. In particular, this is a graphical method for solving a system of three equations with three unknowns, a stereometric study of the pyramid, the method of coordination spheres, which is little used in descriptive geometry, and others.

Keywords: computer descriptive geometry, analytical geometry, theoretical mechanics, algebra, stereometry, problem solving, graphic editor KOMPAS-3D

С методической точки зрения начертательная геометрия (НГ) – это наука, позволяющая решать инженерные задачи по изображению трехмерных объектов на плоскости, имеющей два измерения. При этом исследуемый объект рассматривается из бесконечно удаленных точек в разных направлениях, обычно трех взаимно перпендикулярных.

В классическом виде НГ – основа инженерной графики, является базой создания проектной и конструкторской документации. Кроме того, в публикациях показано, что методы НГ применимы при решении задач в разных областях знаний [1].

Наиболее полно применимость НГ в решении задач разных областей знаний показала Н.Ф. Траутман в задачнике [2]. Поскольку данное издание не переиздавалось около 70 лет и неизвестно современному читателю, кратко изложим методики «карандашного» исполнения.

Математический блок (алгебраические уравнения, стереометрия, тригонометрия, аналитическая геометрия). Общий методический принцип состоит в том, что математическим зависимостям присваивается геометрический образ, и ответ достигается путем построения прямых и циркульных линий. При этом, как это ни странно, графически можно решить более сложные задачи [3, 4].

В аналитической геометрии известно, что пересечением двух уравнений первой степени с тремя неизвестными является прямая линия [5]. А что лежит в пересечении двух уравнений второй степени (частный случай).

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 5^2 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \end{cases}.$$

С точки зрения НГ каждое из представленных уравнений представляет собой поверхность цилиндра. Ось одного из них вертикальна, а второго – горизонтальна (рис. 1). Пересечением являются две одинаковые кривые – два эллипса с численным значением полуосей 5 и 5√2, имеющих пространственную ориентацию. Естественно, данный пример не имеет практического значения, однако он может быть использован математиками для описания пространственного эллипса по бесчисленному числу точек линии пересечения цилиндров, найденных графически.

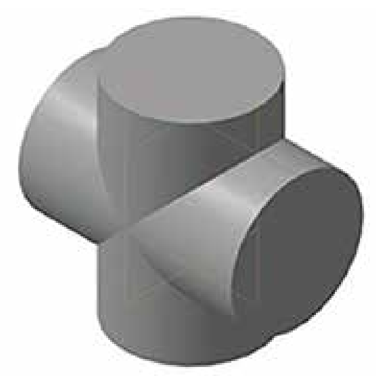

Рис. 1. Пересечение цилиндрических поверхностей

Теоретическая механика. Имея дело с векторами (сила, момент силы и др.) эта дисциплина использует в качестве инструмента тригонометрию, а именно табличные значения синусов и косинусов. Методически проще осуществлять прямые построения и измерения, что существенно облегчает решение особенно трехмерных задач. В задачнике [2] показано более 20 примеров в обоснование сказанного, позволяющих без особых проблем путем прямых измерений углов отработать методику решения задач по данной теме.

И, как это ни странно, методы НГ применимы в решении задач из области машиностроения и технологии обработки металлов. В [2, с. 146–160] при графическом задании условия задач изложены способы обработки металла фрезерованием, создания сложной трехмерной детали, например кулачковой муфты с тремя зубьями [2, с. 147] и др. Как и в предыдущем варианте, методически проще, используя предлагаемые технологические приемы, получать ответ путем прямых измерений. Этот способ удобен и станочникам, например, при работе с системами ЧПУ.

Далее, расширяя области применения методов НГ, изложенные в [2], отметим задачи, связанные с конструкциями подъемно-транспортных механизмов, образование форм металлорежущих механизмов, оптических конструкций и многие другие. Их переосмысливание в свете излагаемой концепции существенно обогатит методические основы НГ.

Обобщая изложенное, отметим некоторое единство методик. Это изображения прямых и циркульных кривых в трехмерном пространстве и манипуляции с ними.

А почему же за столь длительное время, прошедшее с момента их публикации, они не нашли применение? Единственный ответ: это точность.

При всей изящности решения инженерный расчет должен быть убедительным количественно.

Материалы и методы исследования

Если руководствоваться философией Гегеля, развитие происходит по спирали. В данном случае на ее новом витке стоит великое изобретение. Это компьютерные графические программы.

Использование точных компьютерных методов построений и измерений существенно расширяет возможности применения НГ [6].

Каковы плюсы и минусы?

Во-первых, как следует из вышеизложенного, это наглядность. Приятнее строить линию пересечения цилиндров, чем манипулировать с алгебраическими операциями.

Во-вторых, это практически абсолютная точность. Координаты точки пересечения трех плоскостей компьютерная графика обеспечит с любым (разумным) числом знаков, что позволяет ее математический аппарат, заложенный внутри.

Достоверность. Проверить координаты точки пересечения гораздо проще, чем выполнять десятки порой однотипных математических операций для подтверждения полученного результата.

Наконец, это логичность. Одно дело играючи вырезать отверстие в сфере и совсем другое умножать, менять знаки, раскрывать скобки без права на ошибки при этом.

Недостатком является отсутствие универсальности. Не все математические зависимости удается перевести в образы.

И все-таки, несмотря на это, компьютерная графика позволяет получать и новые научные результаты.

Результаты исследования и их обсуждение

В частности, известен метод двухкоординатной равновеликой развертки поверхности вращения, позволяющий измерять телесные углы [7]. Доказана возможность извлечения квадратного корня из отрицательных чисел. Создана теория векторного исчисления на обычной плоскости. Сложение синусоид опробовано в теоретической электротехнике.

Далее приведем методики решения некоторых инженерных задач.

Решение алгебраических уравнений. Решим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} x+y+z=83 \\ x-y+z=28 \\ -x+y+z=69 \end{cases}$$

Представим заданные плоскости в виде следов, по точкам схода на осях координат (рис. 2). Графическую визуализацию решения осуществим традиционным для начертательной геометрии методом, за исключением того, что построения выполнены средствами редактора КОМПАС-3D. В качестве примечания отметим, что использована система обозначений принятая в [8].

Используем оригинальную методику решения, изложенную в [2].

По точке пересечения горизонтальных следов плоскостей P и Q построена линия их пересечения. Ею является фронталь MN.

Искомая точка пересечения (А) плоскости R с MN вычислена с помощью вспомогательной плоскости S.

Ответ. x = 12,259036; y = 27,500000; z = 43,240964.

Анализируя данную методику, отметим, что без использования кропотливых математических вычислений получен ответ с шестью значащими цифрами после запятой.

Решение стереометрических задач геометрии. Применение компьютерной графики позволяет обогатить методику решения подобных задач путем получения дополнительных сведений, недоступных традиционных методическим вариантам.

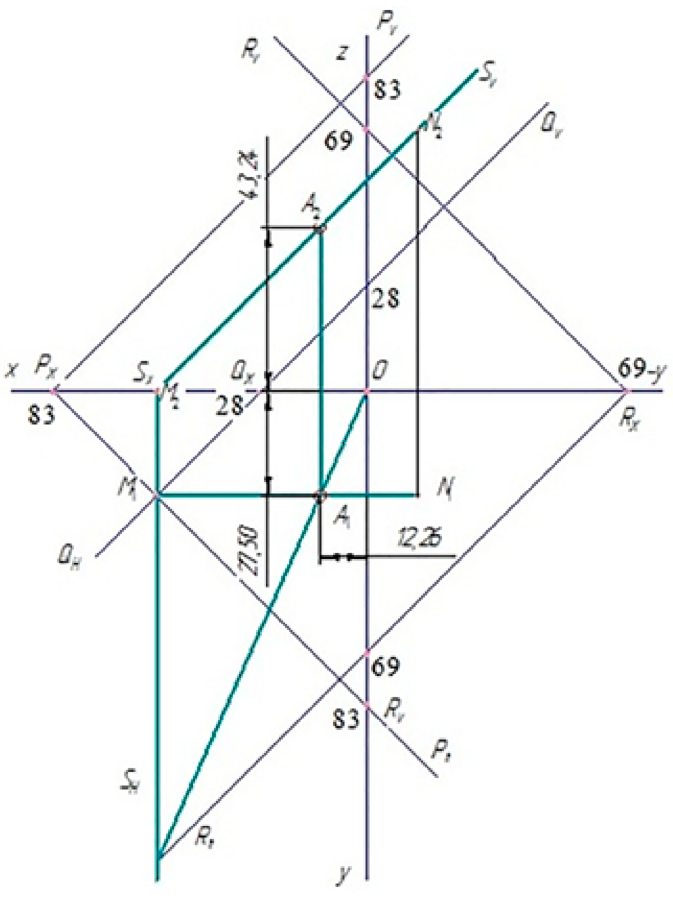

Рис. 2. Графическое решение системы уравнений

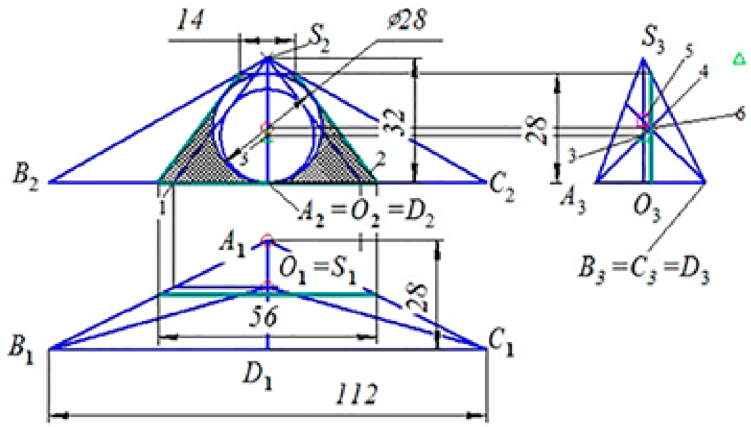

Рис. 3. Графическое решение задачи

Задача (по мотивам задачи 403 [2, с. 128]). Дана пирамида *SADCD* (рис. 3), в которой вершина *S* проецируется в точку O на основании, делящую *AD* в отношении *AO*:*OD* = 3:4, что является нетрадиционным для НГ. Пирамиду рассечь плоскостью, перпендикулярной к *AD* так, чтобы получилась трапеция, в которую вписана окружность. Вычислить параметры трапеции, диаметр и центр окружности, а также координаты точек ее касания с трапецией. Примечание. Последние требования являются новинкой излагаемой методики.

Методические указания. Из курса геометрии известно, что геометрическим местом центров окружностей, касающихся граней трехгранного угла, является отрезок, исходящий из его вершины и центр любой окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежащий в плоскости, перпендикулярный одной из его граней.

С другой стороны центр искомой окружности, касающейся граней двугранного угла, лежит в плоскости, проходящей через ВС и середину высоты пирамиды.

Точка их пересечения является искомой.

Схема решения.

1.Через вершину *S* проведена фронтальная плоскость *S*12. С использованием компьютерной команды *Окружность касательная трех отрезков* построена вписанная окружность. Ее диаметр 24, а центр (точка 3) помечен точкой в виде треугольника.

2. На профильной проекции через точки А и 3 построен отрезок *A*4.

3. Построена точка 5 – середина высоты *SO*.

4. На профильной проекции через точки *D* и 5 построен профильный след искомой плоскости.

5. Построена точка пересечения 6 (помечена кружком) пересечения линий *A*4 и *D*5.

6. На профильной и горизонтальной проекциях построены следы фронтальной плоскости, проходящей через точку 6 (помечены утолщенными отрезками).

7. С помощью линий связи на фронтальной плоскости построена искомая трапеция (заштрихована).

8. С помощью компьютерной программы в трапецию вписана окружность.

9. На рис. 3 показаны некоторые измеренные параметры, число которых при необходимости можно увеличить простым компьютерным измерением. Площадь трапеции составляет 980 квадратных единиц (мм).

Анализируя приведенную методику, отметим сочетание в ней разных учебных дисциплин. Это стереометрия: методы сечения пирамиды. Начертательная геометрия: рассмотрение объекта с разных сторон (три проекции). Компьютерная графика: окружность, касающаяся трапеции, измерение площади.

Геометрическая кристаллография. Геометрические образы вычислительной графики не привязаны ни к какой области знаний, поэтому применим их к сугубо научной теме. Это строение атома или кристаллография. К ней относятся задачи, касающиеся внешнего вида кристаллов или их внутреннего строения (кристаллическая решетка, упаковка шаров).

При этом отметим методическую новизну количественного исследования координат отдельных точек поверхности сферы.

Упаковка шаров (по мотивам задачи 759 [2, с. 246]).

Задача. На дне кубического ящика, внутреннее ребро которого равно 80 мм, вплотную лежат четыре одинаковых шара.

Определить величину диаметра шара, лежащего на дне и касающегося этих шаров, диаметра шара лежащего на этих шарах и касающегося крышки, а также (новизна) координаты всех точек касания шаров, приняв за начало отсчета центр дна ящика.

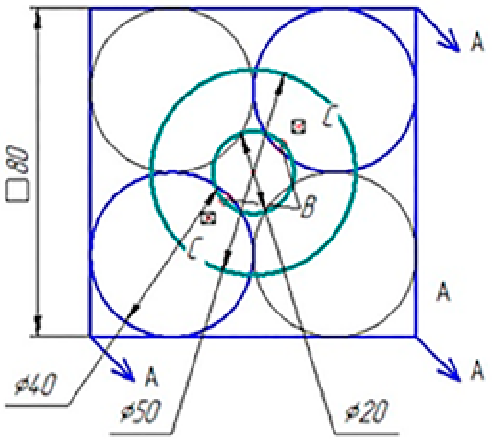

Рис. 4. Графическое условие задачи

Методически в данном случае помимо начертательной геометрии необходимо использовать теорию координационных сфер, используемой в кристаллографии.

Ее суть состоит в том, что центры трех шаров образуют треугольник. Центр описанной вокруг них сферы является центром искомого шара. Особенность методики в том, что иногда третий шар необходимо добавлять.

На рис. 4 показано исходное условие задачи и вид сверху на выполненное решение. Искомые шары показаны утолщенной линией.

Основные построения показаны на рис. 5, на котором показано сечение ящика диагональной плоскостью. С методической точки зрения отметим еще одну особенность графического метода. Здесь каждое действие визуализировано типом и цветом элемента.

Для построения координационных сфер к днищу и крышке привязаны дополнительные шары диаметром 40 (штриховая основная нестандартная линия). Найденные методами компьютерной графики координационные сферы, касающиеся трех шаров каждая численно равны (радиус) 50 и 65 единиц.

Искомые точки касания сфер помечены кружком (малая сфера) и квадратом (большая сфера). Численные размеры точек касания от дна показаны на чертеже. Традиционные методы начертательной геометрии позволяют вычислить координаты и других точек соприкосновения.

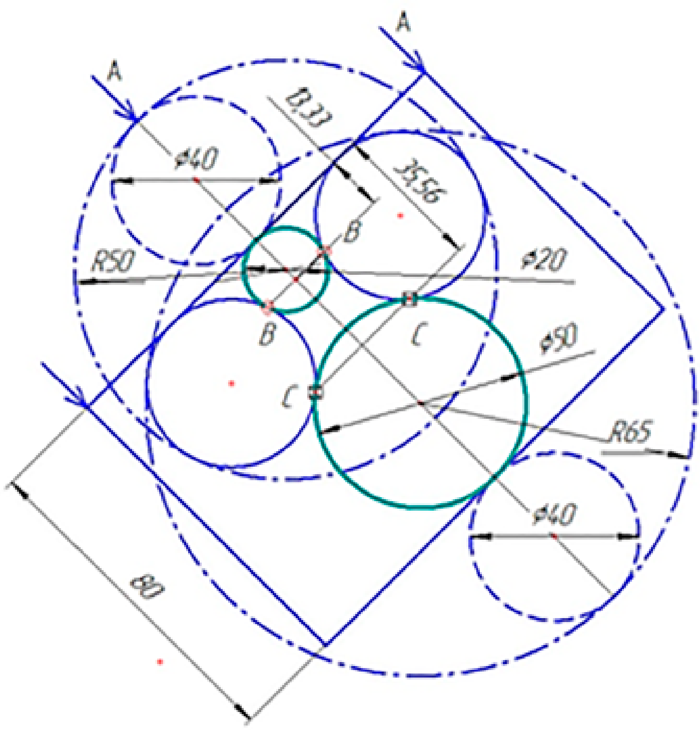

Рис. 5. Метод координационных сфер

Заключение

Используя геометрическую интерпретацию, методы начертательной геометрии пригодны для решения задач в разных областях знаний.

В первую очередь это учебные дисциплины математического цикла. Среди них аналитическая геометрия, стереометрия, алгебра и др. Реальные формы геометрических тел – идеальная основа применения методов начертательной геометрии. В методической литературе приводятся варианты задач из областей машиностроения, технологии обработки металлов, образования форм металлорежущих инструментов и др.

Универсальность графических методик позволяет использовать их и в научных изысканиях и, в частности, в физико-химическом анализе, металлографии, геометрической кристаллографии и др.

Далее отметим методическую уникальность геометрических решений. Во-первых, это логичность. Построить, пусть по строгим правилам НГ, точку пересечения трех плоскостей значительно проще, чем выполнить десятки математических манипуляций.

Во-вторых, это достоверность. Для подтверждения ответа достаточно измерить координаты пусть даже десятка точек.

Однако начертательная геометрия главное, но не единственное методическое достижение. Она, как и математика, должна получать убедительный количественный результат. Единственный способ достижения этого – использование графического редактора, математический аппарат которого позволяет получить результат практически с любым числом знаков.

Кроме того, компьютерная программа по сравнению с карандашным решением, предлагает специфические возможности, расширяя класс решаемых задач. В данном случае можно говорить о новом, графическом, способе доказательстве нового метода.

Суть его состоит в том, что если при сложных преобразованиях чертежа по правилам начертательной геометрии ответом является заранее предполагаемая точка и прием подтвержден многократно, то метод можно считать доказанным. В частности, этот вариант использован при разработке методов ортогонального проецирования на наклонную плоскость [9].

Наконец, главная методическая находка данной работы состоит в сочетании разных дисциплин: начертательная геометрия, стереометрия и компьютерная графика, показанная выше при исследовании пирамиды.

Список литературы

1. Савельев Ю.А., Черкасова Е.Ю. Вычислительная графика в решении нетрадиционных задач // Геометрия и графика. 2020. Т. 8. № 1 С. 33–44. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-33-44.

2. Траутман Н.Ф. Сборник задач по начертательной геометрии. М.: Машгиз, 1953. 279 с.

3. Вяткина С.Г., Туркина Л.В. Решение задач по начертательной геометрии с применением трехмерного моделирования в системе Компас-3D V17 // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 4–2. С. 277–282.

4. Пьянкова Ж.А. Возможности графического редактора «Компас 3D» при формировании компетенций студентов в процессе обучения геометро-графическим дисциплинам // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2016. № 3 (37). С. 95–99.

5. Панчук К.Л., Любчинов Е.В. Циклографическая интерпретация и компьютерное решение одной системы алгебраических уравнений // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 3. С. 3–14. DOI: 10.12737/article_5dce5e528e4301.77886978.

6. Савельев Ю.А., Бабич Е.В. Графическая тригонометрия в модернизации существующих и проектировании новых машин и механизмов // Инновационный транспорт. 2017. № 31 (23). С. 55–62.

7. Савельев Ю.А., Черкасова Е.Ю. Количественное измерение телесных углов // Вестник УрГУПС. 2015. № 4 (28). С. 32–42.

8. Сальков Н.А. Геометрическая составляющая технических инноваций // Геометрия и графика. 2018. Т. 6. № 2. С. 85–93. DOI: 10.12737/article_5b559a548fa209.41386317.

9. Черкасова Е.Ю. Обоснование нового метода косоугольного проецирования в начертательной геометрии // Информатика, вычислительная техника и инженерное образование. ЮФУ. 2019. № 2 (35). URL: http://www/ ivtio.sfedu.ru.