УДК 532.516

КОЛЕБАНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Сенницкий В.Л.

ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск;
ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет», Новосибирск, e-mail: sennitskii@yandex.ru

В работе поставлена и решена задача о вынужденных вращательных колебаниях сферически-симметричной гидромеханической системы, состоящей из несжимаемой вязкой жидкости и окружающего ее абсолютно твердого тела. На систему действует периодически изменяющийся со временем внешний силовой момент. Твердое тело является свободным (движение тела не задано, подлежит определению). Постановка задачи включает в себя уравнение движения твердого тела, уравнение Навье – Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой границе жидкости. Целесообразность рассмотрения данной задачи обусловлена, в частности, следующим. Колебательное движение практически повсеместно и чрезвычайно разнообразно реализуется в природе и в технике, ввиду чего изучение закономерностей колебательного движения неизменно сохраняет свою актуальность. Весьма часто в колебательном движении участвует жидкость (прежде всего представляет интерес изучение движения вязкой жидкости). Для классических задач гидромеханики характерно то, что те или иные части присутствующей в задаче гидромеханической системы – находящиеся в жидкости тела, стенки сосудов – совершают заданное движение. Задачи, в которых гидромеханическая система является свободной, все части системы являются свободными (движение всех частей системы подлежит определению), к настоящему времени мало изучены. Задача, рассмотренная в настоящей работе, представляет собой новую задачу, в которой все части гидромеханической системы являются свободными. Найдено решение данной задачи в отсутствие подчинения значений числа Рейнольдса каким-либо условиям (найдено решение задачи, пригодное при любом положительном значении числа Рейнольдса). С использованием данного решения получены асимптотические формулы, которыми определяется движение твердого тела при малых и больших значениях числа Рейнольдса. Результаты настоящей работы могут использоваться, в частности, при поиске новых подходов к изучению строения гидромеханических систем.

Ключевые слова: свободная гидромеханическая система, твердое тело, вязкая жидкость, вращательные колебания, число Рейнольдса, асимптотические формулы

OSCILLATIONS OF A HYDRO-MECHANICAL SYSTEM WITH A VISCOUS LIQUID

Sennitskiy V.L.

Lavrentev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk;
Novosibirsk State University, Novosibirsk, e-mail: sennitskii@yandex.ru

It is formulated and solved in the work a problem on forced rotatory oscillations of a spherically symmetrical hydro-mechanical system, consisting of an incompressible viscous liquid and a surrounding it absolutely solid body. An external periodically changing in time force moment acts to the system. The solid body is free (the motion of the body is not given, it must be determined). The problem formulation includes the equation of the solid body motion, the equation of Navier – Stokes, the equation of continuity and the conditions at the solid boundary of the liquid. The expediency of the consideration of this problem is conditioned in particular by following. An oscillatory motion realizes in nature and in technics practically everywhere and extremely variedly and in view of this a learning of laws of an oscillatory motion constantly keeps its actuality. Very often a liquid takes part in an oscillatory motion (first of all a learning of the motion of a viscous liquid is of interest). It is of characteristic for classic problems of hydro-mechanics that some parts of the hydro-mechanical system which is present in a problem – bodies which are in a liquid. walls of vessels, the liquid being at infinity – fulfil a given motion. To the present time the problems where a hydro-mechanical system is free, all parts of the system are free (the motion of all parts of the system must be determined) are small studied. The problem which is considered in the present work is a new problem where all parts of the hydro-mechanical system are free. The solution of this problem is obtained under the absence of a subordination of meanings of the number of Reynolds to any conditions (the solution of the problem is obtained which is valid for any positive meaning of the number of Reynolds). With the use of this solution the asymptotic formulas are obtained by which the motion of the solid body is determined for small and foe large meanings of the number of Reynolds. The results of the present work can be used in particular for a search of new approaches to the study of a structure of hydro-mechanical systems.

Keywords: free hydro-mechanical system, solid body, viscous liquid, rotatory oscillations, number of Reynolds, asymptotic formulas

Исследования динамики гидромеханических систем представлены, в частности, в изданиях [1–3]. Экспериментальному и теоретическому изучению влияния периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействий на динамику гидромеханической системы посвящены работы [4, 5].

В [6] поставлена и решена задача о движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью, все части которой являются свободными.

Предметом изучения в настоящей работе является следующая задача. Имеется гидромеханическая система, движение которой подлежит определению. Система состоит из абсолютно твердого тела Ξ и вязкой несжимаемой жидкости. Тело Ξ ограничено двумя сферами радиусов A и A′ (A′ > A) с центрами в точке O – начале инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Масса m тела Ξ распределена сферически-симметрично относительно точки O. Разность A′ – A пренебрежимо мала по сравнению с радиусом A, в связи с чем тело Ξ рассматривается как материальная поверхность (сфера массы m, радиуса A, с центром в точке O). Жидкость заполняет область Q: $0 \le X^2 + Y^2 + Z^2 < A^2$. На тело Ξ, наряду с силами со стороны жидкости, действуют внешние силы. Момент M_{ext} внешних сил относительно оси X периодически с периодом T изменяется со временем t. Тело Ξ совершает обусловленные наличием момента M_{ext} вынужденные вращательные колебания вокруг оси X (монотонное вращение тела Ξ вокруг оси X отсутствует).

Целью работы является определение не зависящего от начальных данных движения гидромеханической системы (тела Ξ и жидкости).

Постановка и решение задачи

Пусть τ = t / T, x = X / A, y = Y / A, z = Z / A, r, θ, φ – сферическая система координат, связанная с системой X, Y, Z соотношениями

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\cos\varphi,\ z = r\sin\theta\sin\varphi;$$

$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ – единичные базисные векторы системы r, θ, φ ($\mathbf{e}_r = \{x / r,\ y / r,\ z / r\}$); $\mathbf{V} = (A / T)\,\mathbf{v}$, υ и ρ – скорость, кинематический коэффициент вязкости и плотность жидкости $\left(\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right)$; $P = (\rho A^2 / T^2)p$ – давление в жидкости; m – масса тела Ξ; $I = (2/3)mA^2$ – момент инерции тела Ξ относительно оси X; Ω = ω / T – угловая скорость вращения тела Ξ вокруг оси X; $Re = A^2 / (\upsilon T)$ – число Рейнольдса; $f = \sin 2\pi\tau$; $M_{ext} = \hat{M}f$ – момент внешних сил, действующих на тело Ξ, относительно оси X ($\hat{M} > 0$ – постоянная);

$$\mu = -2\pi\int_0^\pi\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)_{|r=1}(\sin\theta)^2\,d\theta;$$

$$M_{liq} = \frac{\rho A^5}{Re\,T^2}\,\mu$$

– момент сил, действующих на тело Ξ со стороны жидкости, относительно оси X; $\varepsilon = \hat{M}T^2 / \left(\rho A^5\right)$; $æ = I / \left(\rho A^5\right)$.

Уравнение движения тела Ξ, уравнение Навье – Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой границе жидкости имеют вид

$$æ\frac{d\omega}{d\tau} = \varepsilon f + \frac{\mu}{Re}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\tau} + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}, \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad (3)$$

$$v_r = 0,\quad v_\theta = 0,\quad v_\varphi = \omega\sin\theta \text{ при } r = 1. \qquad (4)$$

Будем рассматривать задачу (1)–(4) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра. Предположим, что

$$\omega \sim \omega_0 + \varepsilon\omega_1,\ \mathbf{v} \sim \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1,\ p \sim p_0 + \varepsilon p_1$$

$$\text{при } \varepsilon \to 0. \qquad (5)$$

Используя (1)–(5) в ε^N – приближении (N = 0, 1), получим

$$æ\frac{d\omega_N}{d\tau} = Nf + \frac{\mu_N}{Re}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_N}{\partial\tau} + (1 - N)\left(\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_0 =$$

$$= -\nabla p_N + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}_N, \qquad (7)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_N = 0, \qquad (8)$$

$$v_{Nr} = 0,\ v_{N\theta} = 0,\ v_{N\varphi} = \omega_N\sin\theta$$

$$\text{при } r = 1, \qquad (9)$$

где

$$\mu_N = -2\pi\int_0^\pi\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_{N\varphi}}{r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_{Nr}}{\partial\varphi}\right)_{|r=1}(\sin\theta)^2\,d\theta,$$

$$v_{Nr} = \mathbf{v}_N\cdot\mathbf{e}_r,\ v_{N\theta} = \mathbf{v}_N\cdot\mathbf{e}_\theta,\ v_{N\varphi} = \mathbf{v}_N\cdot\mathbf{e}_\varphi.$$

Пусть N = 0. Задача (6)–(9) имеет решение

$$\omega_0 = 0,\quad \mathbf{v}_0 = 0,\quad p_0 = p_0(\tau). \qquad (10)$$

Пусть N = 1. Будем искать решение задачи (6)–(9), имеющее вид

$$\omega_1 = \mathrm{Real}\left(\hat{\omega}\,e^{2\pi i\tau}\right),\ \mathbf{v}_1 = \mathrm{Real}\left[v(r,\theta)\,e^{2\pi i\tau}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

$$P_1 = P_1(r,\ \theta, \tau), \qquad (11)$$

где $\hat{\omega}$ – постоянная. Отметим, что для (11) уравнение (8) является выполненным. Используя (6), (7), (9), (11), найдем

$$2\pi i æ\hat{\omega} = -i - \frac{2\pi}{\mathrm{Re}} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{v}{r} \right)_{|r=1} (\sin\theta)^2 \, d\theta, \quad (12)$$

$$p_1 = p_1(\tau), \quad (13)$$

$$q^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2(\sin\theta)^2}, \quad (14)$$

$$v = \hat{\omega}\sin\theta \quad \text{при } r = 1, \quad (15)$$

где $q = (1+i)\sqrt{\pi \mathrm{Re}}$. Сделаем в (14), (15) подстановку

$$v = \hat{v}(r)\sin\theta. \quad (16)$$

В результате этого получим

$$r^2 \frac{d^2\hat{v}}{dr^2} + 2r\frac{d\hat{v}}{dr} - \left(2 + q^2 r^2\right)\hat{v} = 0, \quad (17)$$

$$\hat{v} = \hat{\omega} \quad \text{при } r = 1. \quad (18)$$

Задача (17), (18) имеет решение

$$\hat{v} = \hat{\omega}\,\frac{I_{3/2}(qr)}{I_{3/2}(q)\, r^{1/2}}, \quad (19)$$

где $I_{3/2}$ – модифицированная функция Бесселя. Отметим, что ввиду наличия соотношения

$$I_{3/2}(q) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} J_{3/2}(q)$$

($J_{3/2}$ – функция Бесселя), согласно теореме Ломмеля

$$I_{3/2}(q) \neq 0$$

для любого положительного значения Re. Из (11), (15), (16), (19) следует

$$\mathbf{v}_1 = \mathrm{Real}\left[\hat{\omega}\,\frac{I_{3/2}(qr)}{I_{3/2}(q)}\, e^{2\pi i\tau} \right] \frac{\sin\theta}{r^{1/2}}\mathbf{e}_{\varphi}. \quad (20)$$

Используя (12), (16), (19), получим

$$\hat{\omega} = -\frac{i}{2\pi i æ + \Phi}, \quad (21)$$

где $\Phi = \dfrac{8\pi}{3\mathrm{Re}}\dfrac{qI_{1/2}(q) - 3I_{3/2}(q)}{I_{3/2}(q)}$

($I_{1/2}$ – модифицированная функция Бесселя). Формулами

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1,\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1,\ p = p_0 + \varepsilon p_1 \quad (22)$$

и (10), (11), (13), (20), (21) определяется приближенное решение задачи (1)–(4).

Остановимся на вопросе о движении тела Ξ при малых и больших (по сравнению с единицей) значениях числа Рейнольдса.

Предварительно отметим следующее.

1. Пусть область Q заполнена не жидкостью, а однородным твердым телом Ξ′ (шаром радиуса A с центром в точке O) плотностью ρ, и тела Ξ, Ξ′ колеблются как одно твердое тело. Тогда движение системы (тела Ξ и тела Ξ′) определяется уравнением

$$(I + I')\frac{d\Omega}{dt} = M_{ext}. \quad (23)$$

Здесь $I' = (8\pi/15)\rho A^5$ – момент инерции тела Ξ′ относительно оси X. Из (23) следует

$$\Omega = \eta_1, \quad (24)$$

где

$$\eta_1 = \frac{T}{2\pi(I + I')}\hat{M}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Пусть в области Q отсутствует какая-либо материальная среда. Тогда движение системы (тела Ξ) определяется уравнением

$$I\frac{d\Omega}{dt} = M_{ext}. \quad (25)$$

Из (25) следует

$$\Omega = \eta_2, \quad (26)$$

где

$$\eta_2 = \frac{T}{2\pi I}\hat{M}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Отметим, что «твердотельные» колебания η_1, η_2 имеют сдвиг по времени на –T/4 по отношению к моменту M_{ext}.

Обратимся к полученному решению задачи (1)–(4). Используя (10), (11), (21), (22), найдем

$$\omega \sim -\frac{\varepsilon}{2\pi}\mathrm{Real}\left\{ \left[1 + \frac{16\pi^2\, i\,\mathrm{Re}}{525(æ + 8\pi/15)} \right] \frac{e^{2\pi i\tau}}{æ + 8\pi/15} \right\}$$

при $\mathrm{Re} \to 0$, (27)

$$\omega \sim -\frac{\varepsilon}{2\pi æ}\mathrm{Real}\left\{ \left[1 - \frac{4\sqrt{\pi}(1-i)}{3æ\sqrt{\mathrm{Re}}} \right] e^{2\pi i\tau} \right\}$$

при $\mathrm{Re} \to \infty$. (28)

Из (27), (28) следуют приближенные формулы

$$\Omega = \eta_1 + \xi_1 \quad (29)$$

– для малых значений Re; здесь

$$\xi_1 = \frac{I'TRe}{35(I+I')^2}\hat{M}\sin\frac{2\pi t}{T}; \qquad (30)$$

$$\Omega = \eta_2 + \xi_2 \qquad (31)$$

– для больших значений Re; здесь

$$\xi_2 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho A^5 T}{I^2\sqrt{Re}}\hat{M}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{7\pi}{4}\right). \qquad (32)$$

Согласно (29), (31) и при малых, и при больших значениях Re угловая скорость Ω представляет собой сумму «больших» колебаний (которые совпадают с «твердотельными» колебаниями (24), (26)) и «малых» колебаний (30), (32). Отметим, что при малых значениях Re «малые» колебания угловой скорости имеют нулевой сдвиг по времени; при больших значениях Re «малые» колебания угловой скорости имеют сдвиг по времени $-7T / 8$ по отношению к моменту M_{ext}.

Заключение

В настоящей работе определено движение гидромеханической системы с вязкой жидкостью. Тем самым установлено, каковы отклики системы на оказываемые на нее периодические по времени воздействия. Найдено, в частности, что при малых и больших (по сравнению с единицей) значениях числа Рейнольдса присутствие в системе вязкой жидкости проявляется в наличии «малых» колебаний угловой скорости окружающего жидкость твердого тела. Формулами (30), (32) демонстрируется связь между параметрами гидромеханической системы и являющимися наблюдаемыми «малыми» колебаниями угловой скорости вращения твердого тела.

Полученные результаты могут использоваться, в частности, в исследованиях возможностей малоинвазивного изучения строения гидромеханических систем.

Список литературы

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТ-ТЛ, 1955. 521 с.

2. Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 7–11 сентября 2020 г.). Тезисы докладов. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2020. 262 с.

3. Международная конференция «Минские научные чтения – 2021» (Минск, 9 декабря 2021 г.). Сборник статей в 3-х т. Минск: Белорусский государственный технологический университет, 2021. 883 с.

4. Карпунин И.Э., Козлов В.Г., Козлов Н.В. Влияние высокочастотных колебаний жидкости на вязкое капельное включение в ячейке Хеле-Шоу // Конвективные течения. 2019. № 9. С. 36–51. DOI: 10.24411/2658-5421-2019-10904.

5. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. № 2. С. 126–133. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.210.

6. Сенницкий В.Л. Нестационарное вращение цилиндра в вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1980. № 3. С. 66–69.