

УДК 53:514

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Черкасова Е.Ю.

ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург,
e-mail: elena030358@mail.ru

Начертательная геометрия – это дисциплина, которая формирует азы графических знаний и положена в основу инженерной графической подготовки. Она была создана французским ученым Гаспаром Монжем, применившим метод графических построений и практиковавшим вычислительные методы решения графических задач. Проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций позволяет получить обратимый чертеж, который можно применить при решении задач в смежных областях знаний. Применение систем автоматизированного проектирования при построении чертежа увеличивает точность полученных результатов и позволяет решать задачи с временными характеристиками и задачи о взаимном положении объектов, изменяющих свое положение в пространстве с течением времени. Решение задач в проекциях с высокой точностью построений дает возможность определить характеристики движущихся объектов, вычислить расстояние между ними, графически построить решение четырехмерной задачи и получить правильный результат. Возможности начертательной геометрии расширены, построения применимы для решения различных задач из различных областей знаний: машиностроения и технологии обработки металлов, задачи, связанные с конструкциями подъемно-транспортных механизмов, формой металлорежущих инструментов, технической оптики, инженерно-строительного дела и монтажа электрических сетей.

Ключевые слова: графические способы решения задач, графический редактор, вычислительная графика, начертательная геометрия, построение проекций

APPLICATION OF DESCRIPTIVE GEOMETRY METHODS FOR SOLVING PHYSICAL PROBLEMS

Cherkasova E. Yu.

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, e-mail: elena030358@mail.ru

Descriptive geometry is a discipline that forms the basics of graphic knowledge and is the basis of engineering graphic training. It was created by the French scientist Gaspard Monge, who applied the method of graphical constructions and practiced computational methods for solving graphical problems. Projection onto two mutually perpendicular projection planes allows you to obtain a reversible drawing that can be applied to solving problems in related fields of knowledge. The use of computer-aided design systems in the construction of a drawing increases the accuracy of the results obtained and allows solving problems with time characteristics and problems about the mutual position of objects that change their position in space over time. Solving problems in projections with high accuracy of constructions makes it possible to determine the characteristics of moving objects, calculate the distance between them, graphically construct a solution to a four-dimensional problem and get the correct result. The possibilities of descriptive geometry have been expanded, the constructions are applicable to solving various tasks from various fields of knowledge: mechanical engineering and metalworking technology, tasks related to the construction of lifting and transport mechanisms, the shape of metal-cutting tools, technical optics, civil engineering and installation of electrical networks.

Keywords: graphic methods of solving problems, graphic editor, computational graphics, descriptive geometry, projection construction

Предметом начертательной геометрии (GEOMETRIE DESCRIPTIVE), созданной Гаспаром Монжем [1], является способ построения проекций геометрических тел и их поверхностей, а также точек, линий, плоскостей, эллипсов, гипербол и др.

Учение Г. Монжа положено в основу современной графической инженерной подготовки и используется при создании конструкторской документации при проектировании любых конструкций и сооружений. Система ЕСКД (единая система конструкторской документации) базируется на теории ортогонального проецирования, теоретические основы которого содержит начертательная геометрия. Например, ГОСТ 2.305-2008 «Изображения. Виды, разрезы, сечения».

Однако, что менее известно, Г. Монж в своем основополагающем труде «Начертательная геометрия» [1] уделяет значительное место «применению пересечений к решению различных задач», то есть задач смежных дисциплин, которые изучаются в высшей школе.

Развитие этих методов наиболее полно представлено в сборнике задач Н.Ф. Траутман [2], где приведены графические способы решения задач из различных научно-технических областей: физики, механики, материаловедения и др.

Методы решения практических задач, приведенные в учебнике, не нашли широкого применения по объективной причине. Это недостаточная точность вычислений по объектам, которые построены при по-

мощи чертежных инструментов: линейки, циркуля и карандаша.

Графические редакторы с их мощным математическим ядром меняют ситуацию. Только за счет точного построения прямых и циркульных линий, а также измерения координат точек, углов, длин отрезков и площадей можно получить не только математически точные численные ответы, но качественно новые научные результаты [3].

В математике широко используется визуализация уравнений в виде графиков функций. Но возможность сдвига их на чертеже методами НГ позволила доказать, что число корней уравнений зависит только от численной величины свободного члена [4].

Визуализация математического аппарата с «парой чисел» позволила создать теорию графического вычисления на обычной плоскости [5].

В международной системе единиц СИ [6, с. 25] указано, что единица измерения телесного угла не имеет размерности. Однако авторский метод двухкоординатной равновеликой развертки позволяет предложить и размерность, и способ ее количественного измерения.

Созданный в развитие теории начертательной геометрии авторский метод проекций с временными отметками позволил количественно решать пространственно-временные задачи с семью и более переменных [7].

Манипуляции с графиками функций не только позволили создать графическую теорию мнимых чисел, которая подтверждена сечениями геометрических тел (конусов вращения), но и предложить общие математические зависимости описания некоторых «замечательных» кривых; эллипса, гиперболы и окружности [8].

Изложенные результаты графических исследований позволили обобщить их термином «вычислительная графика». В развитие теории начертательной геометрии предлагаем метод, позволяющий решать задачи по определению величин, характеризующих физические процессы.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим примеры классических задач.

Задача 1. В бассейн проведены 5 труб: A, B, C, D, E . Через некоторые из них вода вливается, через другие – выливается. Известно, что при совместном действии труб B, C, E бассейн заполняется за 6,94 ч (m), труб A, C, D – за 5,17 ч (n), труб A, E – за 11,68 ч (p), а труб B, D – 14,66 ч (g). За какое время заполнится бассейн одной трубой C ?

Графическое решение задачи показано на рис. 1. На нем в координатах время (ось абсцисс в масштабе) – объем бассейна (ось ординат) показано его заполнение заданными комбинациями труб в отдельности (m, n, p, g). Особенность метода в том, что цифровые значения используются только при вводе исходных данных и получении ответа.

Графическое сложение. Ординаты (отрезки) часовой (допустима любая) произвольности комбинаций на прямой добавляются друг к другу. Результат (2,49) – время заполнения бассейна двойным набором труб, так как они упоминаются в условии дважды (каждая).

Графическое умножение. Построение симметричного относительно вертикальной оси симметричного отрезка. Результат – время заполнения бассейна одним комплектом труб (4,98).

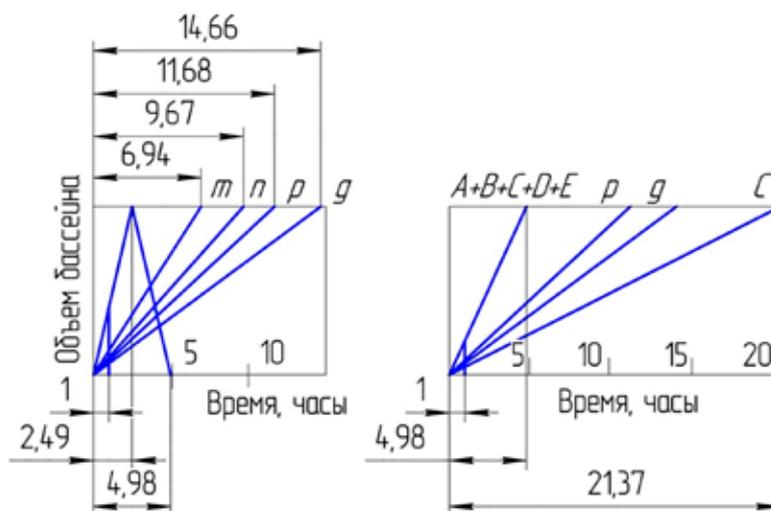


Рис. 1. Графическое решение задачи наполнения бассейна

Графическое вычитание. Из суммарной производительности вычитается производительность комбинаций p и g , так как в них не упоминается труба C .

По полученной разности строится график работы искомой трубы, и измерением абсциссы определяется искомое время: 21,37.

Для сравнения ниже показан математический расчет времени заполнения бассейна одним комплектом:

$$x = \frac{2mnp g}{mnp + mng + mp g + n p g} = \frac{22982,126104448}{4611,7825} = 4,9833.$$

Логичность графических построений покажем и на следующем примере, решения задачи на определение взаимного положений и скорости двух движущихся тел.

Задача 2. Два тела, с постоянной скоростью навстречу друг другу, столкнутся через m с. Если же одно тело будет догонять другое, то столкновение произойдет через n с при тех же скоростях. Определить скорости обоих тел, расстояние, пройденное быстрым телом, если известно, что первоначально тела находились на расстоянии d друг от друга. Пусть дано: $m = 15,69$; $n = 35,52$; $d = 40$ произвольных единиц.

Решение выполним на графике в координатах время/расстояние (рис. 2). На оси абсцисс отметим в масштабе заданные значения m и n , а скорость быстрого тела изобразим произвольной наклонной линией, выходящей из начала отсчета. На графике скорости отметим точки a и b : точки встречи двух тел, двигающихся навстречу (a) и вдогонку (b).

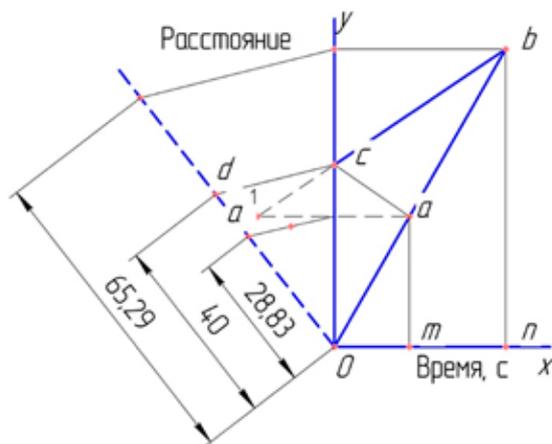


Рис. 2. Графическое решение задачи движения двух тел

Скорость медленного тела строго соотносится со скоростью быстрого и поэтому произвольно на графике построена быть не может. Но, по условию задачи, известно, что ее скорость постоянна. Следовательно, угол наклона ее графика к оси ординат в известной точке c должен быть одинаковым (вверх и вниз). Эта задача характерна для оптики, бильярда, определения расстояния до Луны (двойное отражение). В данном случае достаточно построить точку a' , симметричную a относительно оси ординат.

Определение искомых расстояний осуществим методом подобия по известному параметру d .

Скорости тел, вычисленные аналитически, составляют 0,71 и 1,84. Однако в графической программе их также можно вычислить методом подобия (рис. 2).

Методы начертательной геометрии применимы для решения задач теоретической механики, определения характерных точек движущегося звена, например, мгновенного центра скоростей.

Задача 3. Графически найти положение мгновенного центра при перемещении звена AB . Вычислить углы поворота относительно центра точек A , B и звена AB в целом.

Мгновенный центр всегда находится в точке пересечения двух перпендикуляров, проведенных через середины отрезков, отображающих путь перемещения точек A и B . Измерения показали, что углы перемещения точек A и B численно равны и составляют $33^{\circ}15'$.

Более того, в результате графического анализа установлено, что отрезок AB , перемещаясь на величину 30 м, одновременно поворачивается на точно такой же угол (рис. 3).

Отметим, что расширительно начертательная геометрия позволяет найти мгновенную ось произвольного перемещения звена AB в пространстве (в пространстве это может быть только ось). Приведем алгоритм ее нахождения.

Построить две параллельные плоскости, в которых перемещаются точки A и B .

Двукратной заменой плоскостей проекций (метод начертательной геометрии) найти истинную величину перемещений в соответствующих плоскостях точек A и B (AA_1 и BB_1).

Построением перпендикуляров через середину к отрезкам AA_1 и BB_1 в каждой плоскости найти точку, принадлежащую мгновенной оси.

Обратным построением найти проекции положения мгновенной оси в пространстве.

Для сведения отметим, что два положения звена в пространстве являются двумя образующими гиперболоида.

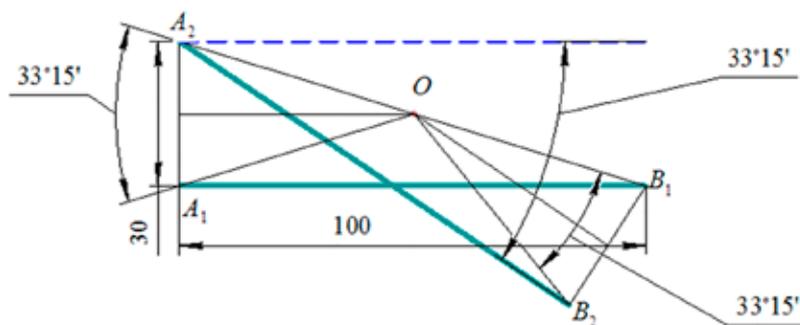


Рис. 3. Численное графическое определение мгновенного центра

Скорее всего, только методы начертательной геометрии позволят решать задачи теоретической механики, так как в этой учебной дисциплине вторые проекции объектов обычно не используются.

Методами начертательной геометрии можно, дополнительно или взамен, исследуя движение точки, вычислять ее скорость, нормальное и касательное ускорения, параметры кривизны и др.

Выводы

В результате нашего исследования можно заключить, что:

– Дисциплина «Начертательная геометрия» закладывает основы ортогонального проецирования – теории построения чертежа. Чертеж – это документ, содержащий изображения изделия и другие данные, необходимые для изготовления изделия. Построение изображений изделий – это необходимая техническая компетенция, которую осваивает будущий инженер.

– Методы начертательной геометрии применимы для решения задач смежных дисциплин, нахождения физических параметров объектов трехмерного пространства, характеристики физических процессов, определение параметров, характеризующих движение точки и твердого тела. Здесь значение имеет точность построений, недостижимая при построении чертежа ручными методами: линейка, карандаш, циркуль.

– Использование для графических построений компьютерных программ [9], обладающих математическим ядром и отличающихся высокой (до восьми знаков после запятой) точностью построений позволяет применить методы начертательной геометрии в практических ситуациях,

для решения технических и физических задач, что и продемонстрировано в данной публикации.

– Графические способы решения задач общетехнических дисциплин позволяют находить различные физические величины, характеризующие процессы, происходящие в материальном мире, как изменение объема, так и скоростные характеристики движущейся точки, движущегося звена, найти характерные точки движущихся объектов и определить их положение в пространстве в заданной системе отсчета, что невозможно при решении задач аналитическими методами.

Список литературы

1. Гаспар Монж. Начертательная геометрия. М.: Издательство АН СССР, 1947. 291 с.
2. Траутман Н.Ф. Сборник задач по начертательной геометрии. М.: Машгиз, 1953. 279 с.
3. Черкасова Е.Ю. Методические основы компьютерной начертательной геометрии // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2021. № 6. С. 68–73.
4. Савельев Ю.А. Четырехмерный континуум пространство – время // Вестник УрГУПС. 2013. № 1 (17). С. 14–23.
5. Вяткина С.Г., Туркина Л.В. Решение задач по начертательной геометрии с применением трехмерного моделирования в системе Компас-3D V17 // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 4–2. С. 277–282.
6. Бурдун Г.Д. Справочник по Международной системе единиц. М.: Изд-во стандартов, 1977. 232 с.
7. Савельев Ю.А., Бабич Е.В. Графическая тригонометрия в модернизации существующих и проектировании новых машин и механизмов // Инновационный транспорт. 2017. № 31 (23). С. 55–62.
8. Савельев Ю.А., Черкасова Е.Ю. Вычислительная графика в решении нетрадиционных задач // Геометрия и графика. 2020. Т. 8. № 1. С. 33–44.
9. Сальков Н.А. Геометрическая составляющая технических инноваций // Геометрия и графика. 2018. Т. 6. № 2. С. 85–93.