

СТАТЬЯ

УДК 519.6:629.7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНОСТУПЕНЧАТОЙ РАКЕТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СТАРТА ПРИ ВЫВОДЕ ЕЕ НА НИЗКУЮ ОРБИТУ ЗЕМЛИ

Мозжорина Т.Ю., Рожков А.А.

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)», Москва, e-mail: Mozzhorina@mail.ru

В данной работе решается задача оптимального управления одноступенчатой ракетой горизонтально-го старта при выводе ее на низкую орбиту Земли. Оптимизация основана на применении принципа максимума Понтрягина и численных методов. Предполагалась возможность изменения направления вектора тяги и наличия аэродинамических рулей, поддерживающих постоянство нулевого угла атаки. Ограничений на допустимый угол вектора тяги по отношению к оси ракеты, а также на допустимый уровень перегрузки не накладывалось. Ставилась задача исследования возможности вывода на орбиту одноступенчатой ракеты горизонтального старта с дозвукового носителя при оптимизации угла действия тяги двигателя. Минимизировался потребный расход топлива на выполнение задачи или время вывода на орбиту, что является эквивалентным при постоянном расходе топлива жидкостного реактивного двигателя. Численное решение с использованием принципа максимума Понтрягина было найдено методом пристрелки. В качестве исходных данных были выбраны характеристики первой ступени трехступенчатой американской ракеты легкого класса «Пегас». Численный эксперимент показал, что при оптимальном управлении вектором тяги и применении топлив с высоким удельным импульсом возможен вывод одноступенчатой ракеты на низкую орбиту Земли.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, метод пристрелки решения краевых задач, одноступенчатая ракета горизонтального старта, управляемый вектор тяги

SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF A SINGLE-STAGE HORIZONTAL LAUNCH ROCKET WHEN INTRODUCING IT TO A LOW EARTH ORBIT

Mozzhorina T.Yu., Rozhkov A.A.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, e-mail: Mozzhorina@mail.ru

In this paper, we solve the problem of optimal control of a single-stage horizontal launch rocket when it is launched into a low Earth orbit. Optimization is based on the application of the Pontryagin maximum principle and numerical methods. It was assumed the possibility of changing the direction of the thrust vector and the presence of aerodynamic rudders, maintaining the constancy of the zero angle of attack. There were no restrictions on the permissible angle of the thrust vector with respect to the axis of the rocket, as well as on the permissible level of overload. The task was to study the possibility of launching into orbit a single-stage horizontal launch rocket from a subsonic carrier while optimizing the angle of action of the engine thrust. The required fuel consumption to complete the task or the time to orbit was minimized, which is equivalent to a constant fuel consumption of a liquid-propellant jet engine. A numerical solution using the Pontryagin maximum principle was found by the shooting method. The characteristics of the first stage of the three-stage American Pegasus light rocket were chosen as the initial data. A numerical experiment has shown that with optimal control of the thrust vector and the use of fuels with a high specific impulse, it is possible to launch a single-stage rocket into a low Earth orbit.

Keywords: optimal optimal control, Pontryagin's maximum principle, shooting method for solving boundary value problems, single-stage horizontal launch rocket, controlled thrust vector

Выведение спутников на низкую околоземную орбиту возможно как с применением вертикального, так и с горизонтальным стартом, когда ракета-носитель выводится на некоторую высоту с дозвуковой скоростью самолетом, после чего происходит ее сброс и включение двигателей первой ступени. Горизонтальный старт имеет ряд преимуществ, особенно в классе легких ракет, выводящих небольшие по массе грузы на невысокие орбиты Земли. Примером таких ракет может служить американская ракета «Пегас» [1]. Она имеет 3 ступени с двигателями, работающими на твердом топливе. Относительная масса топлива составляет для нее около 90% от стартовой массы. Представляет интерес оценить возможность вывода на низкую

околоземную орбиту одноступенчатой ракеты с горизонтального старта, которая будет оборудована двигателем с изменяемым вектором тяги. Проведенный численный эксперимент в данной работе представляет собой предварительную оценку такой возможности с рядом допущений и упрощений математической модели. Задача оптимизации управления вектором тяги была решена методом пристрелки с использованием принципа максимума Понтрягина. Расчет аэродинамического сопротивления проводился при допущении постоянства коэффициента аэродинамического сопротивления $X_{aer} = \frac{c_x \rho V^2 S}{2}$, где c_x – коэффициент аэродинамического сопротивления,

ρ – плотность воздуха, зависящая от высоты, V – скорость полета, S – характерная площадь летательного аппарата (в данной задаче площадь миделя ракеты). Это связано с тем, что достижение сверхзвуковых скоростей на высотах выше 12000 м происходит достаточно быстро, а основное изменение коэффициента аэродинамического сопротивления происходит на трансзвуковых скоростях [2]. Также предполагалось, что ракета имеет аэродинамические рули, позволяющие поддерживать нулевой угол атаки и не создающие значительной подъемной силы. Кроме этого, не рассматривались ограничения на возможный угол отклонения вектора тяги и прочностные ограничения конструкции ракеты. Плотность воздуха аппроксимировалась экспоненциальной зависимостью, дающей достаточно хорошее совпадение со значениями Международной Стандартной Атмосферы [3] на высотах от 13 км и выше.

Цель исследования – провести численный эксперимент для легкой ракеты горизонтального старта, идентичной по параметрам первой ступени ракеты «Пегас», решить задачу оптимизации управления (угол действия тяги двигателя), используя принцип максимума Понтрягина методом пристрелки, по полученным результатам оценить возможность вывода на низкую орбиту Земли одноступенчатого варианта ракеты.

Математические модели и численные методы

Критерий эффективности управления – минимум затрат топлива на выполнение

миссии или минимум времени вывода ракеты на орбиту при постоянном уровне тяги, а следовательно, и расхода топлива.

$$J = \int_0^T dt = T \rightarrow \min.$$

Система уравнений движения в полярной системе координат:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P \cos \theta}{m} - \frac{X_{aer} \cos \theta_{tr}}{m} - \frac{UV}{R} \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{P \sin \theta}{m} - \frac{X_{aer} \sin \theta_{tr}}{m} - g + \frac{V^2}{R} \\ \frac{dR}{dt} &= U \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V}{R} \end{aligned} \right.$$

где R – расстояние от центра Земли, м; V – скорость, перпендикулярная радиусу, м/с; U – скорость вдоль радиуса, м/с; φ – угол, рад; $P = JG_T$ – тяга двигателя, Н; J – импульс ракетного двигателя, м/с; G_T – расход топлива, кг/с; X_{aer} – сила аэродинамического сопротивления, Н; m – масса ракеты, кг;

$g = 9,81 \frac{R_3^2}{R^2}$ – ускорение свободного падения, м/с², R_3 – радиус Земли, м; t – время, с, θ – управление, угол действия тяги (между осью ракеты и направлением силы тяги), рад, θ_{tr} – траекторный угол (между скоростью и перпендикуляром к местному радиусу), рад,

$$\sin \theta_{tr} = \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}}; \quad \cos \theta_{tr} = \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}}; \quad \frac{X_{aer}}{m} = \frac{c_x}{2} \rho \cdot (U^2 + V^2) \cdot \frac{S / m_0}{1 - G_T t / m_0};$$

$\rho = 1,703746625(R - R_3) \exp(-0,000142422)$ – плотность воздуха по высоте, кг/м³, S / m_0 – относительная площадь миделя ракеты.

В качестве исходных данных были приняты технические характеристики первой ступени ракеты Пегас. Момент сброса ракеты с самолета-носителя принимался при высоте 13000 м и горизонтальной скорости полета при $M = 0,85$. При использовании принципа максимума Понтрягина функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_R U + \psi_V \left(\frac{P \cos \theta}{m} - \frac{X_{aer} \cos \theta_{tr}}{m} - \frac{UV}{R} \right) + \psi_U \left(\frac{P \sin \theta}{m} - \frac{X_{aer} \sin \theta_{tr}}{m} - g + \frac{V^2}{R} \right) + \psi_\varphi \frac{V}{R} - 1,$$

где $\psi_R, \psi_V, \psi_U, \psi_\varphi$ – сопряженные переменные.

Максимум функции Понтрягина по управлению определим из $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$.
Отсюда для оптимального управления

$$\sin \theta^* = \frac{\psi_U}{\sqrt{\psi_U^2 + \psi_V^2}}; \quad \cos \theta^* = \frac{\psi_V}{\sqrt{\psi_U^2 + \psi_V^2}}.$$

Дополним систему уравнений движения сопряженной системой:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_U}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial U} = \psi_V \cdot V / R - \psi_R + \frac{c_x S / m_0}{2(1 - G_T t / m_0)} \cdot \rho \cdot (\psi_V \cdot F2 + \psi_U \cdot F1) \\ \frac{d\psi_V}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V} = \psi_V \cdot U / R - 2V \cdot \psi_U / R + \frac{c_x S / m_0}{2(1 - G_T t / m_0)} \cdot \rho \cdot (\psi_V \cdot F4 + \psi_U \cdot F3) - \frac{\psi_\varphi}{R} \\ \frac{d\psi_R}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = \psi_U (V^2 / R^2 - 2 \cdot 9,81 \frac{R_3^2}{R^3}) - \psi_V \cdot UV / R^2 + \frac{c_x S / m_0}{2(1 - G_T t / m_0)} \cdot \frac{d\rho}{dR} \cdot \frac{(\psi_U \cdot U + \psi_V \cdot V)}{\sqrt{U^2 + V^2}} + \frac{\psi_\varphi V}{R^2} \\ \frac{d\psi_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$F1 = \frac{(V^2 + 2U^2)}{\sqrt{U^2 + V^2}}; \quad F2 = F3 = \frac{V \cdot U}{\sqrt{U^2 + V^2}}; \quad F4 = \frac{(2V^2 + U^2)}{\sqrt{U^2 + V^2}}$$

Получим П-систему с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} R(0) &= 6384000 \text{ м}, U(0) = U(T) = 0, V(0) = 236,11 \text{ м/сек}, \varphi(0) = 0 \\ R(T) &= 6471000 \text{ м}, \psi_\varphi(T) = 0. \end{aligned}$$

Решение было получено методом пристрелки. Метод пристрелки или стрельбы дает наиболее точные результаты численного решения краевых задач [4]. Возможность решения реальных задач оптимального управления указанным методом как для задач без ограничений по управлению, так и для задач с переключением управления показана в [5–7]. Внешний цикл – модифицированный метод Ньютона обращается к численному методу решения задачи Коши – методу Рунге – Кутты 4-го порядка. Для более точного выхода из метода численного интегрирования вводился новый аргумент $t_1 = t / T \in [0, 1]$, где T – время вывода ракеты на орбиту соответственно, П-система претерпевает изменения, связанные с ведением нового аргумента.

Параметры пристрелки и невязки для этого варианта расчета выбирались следующие:

$\psi_r(0), \psi_v(0), \psi_U(0), T$, – параметры пристрелки

$$\delta_1 = U(T) \rightarrow 0, \delta_2 = \frac{(V(T) - V_{orb})}{V_{orb}} \rightarrow 0,$$

$$\delta_3 = H(T) \rightarrow 0,$$

$$\delta_4 = \frac{(R(T) - R_{orb})}{R_{orb}} \rightarrow 0 - \text{невязки.}$$

Точность вычислений определялась условием: $\max\{|\delta_i|\} < 10^{-5}$ ($i \in [1, 4]$).

Результаты расчетов

Расчеты были проведены для различных значений удельного импульса топлива (2000 м/с и 4000 м/с) и для дозвуковой скорости старта и небольшой сверхзвуковой скорости старта ракеты (соответствующим на 13 км числу Маха полета $M = 0,85$ и $M = 2$).

Результаты расчетов приведены на рис. 1–6 и в таблице. Варианты 1 и 3 расчета соответствовали дозвуковой скорости старта и удельным импульсам топлива, равным соответственно 2000 м/с и 4000 м/с. Варианты 2 и 4 соответствовали сверхзвуковой скорости старта и удельным импульсам топлива, равным соответственно 2000 м/с и 4000 м/с.

Заключение

Увеличение начальной стартовой скорости с дозвуковой до сверхзвуковой при $M = 2$ оказывает незначительное влияние на время вывода ракеты на орбиту, а следовательно, почти не снижает потребные затраты топлива. Вместе с тем переход через трансзвуковые скорости значительно увеличивает нагрузку на начальный носитель ракеты и усложняет конструктивное решение.

Увеличение значения импульса ЖРД сокращает потребное количество топлива почти на 20%, что делает реализацию одноступенчатой ракеты-носителя с горизонтальным стартом при оптимальном управлении вектором тяги вполне вероятной.

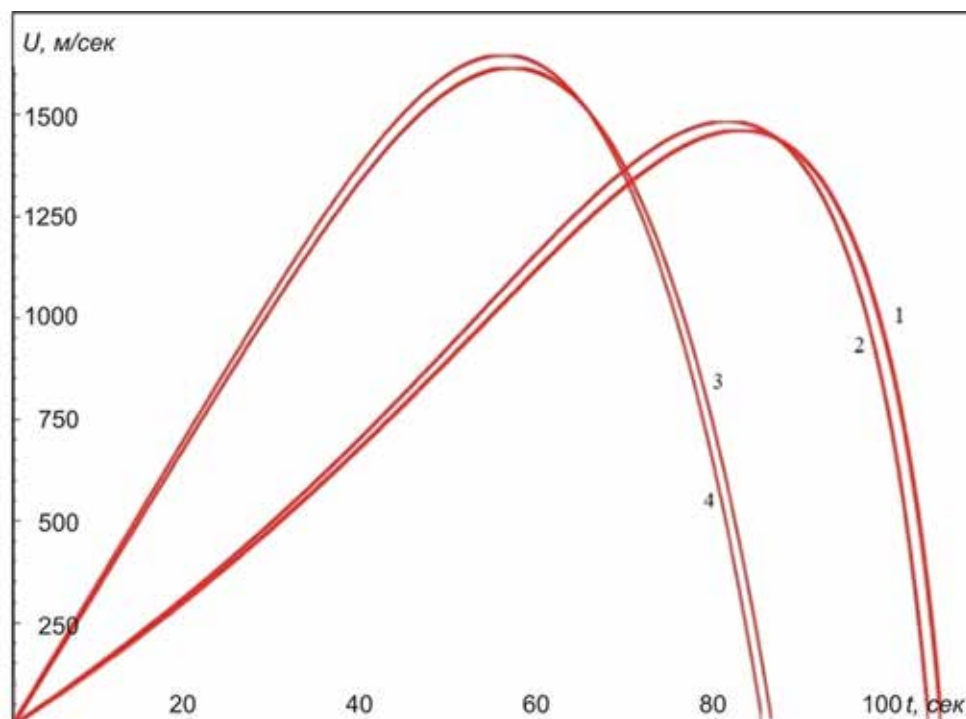


Рис. 1. Изменение радиальной скорости ракеты по времени при выводе ее на низкую орбиту Земли

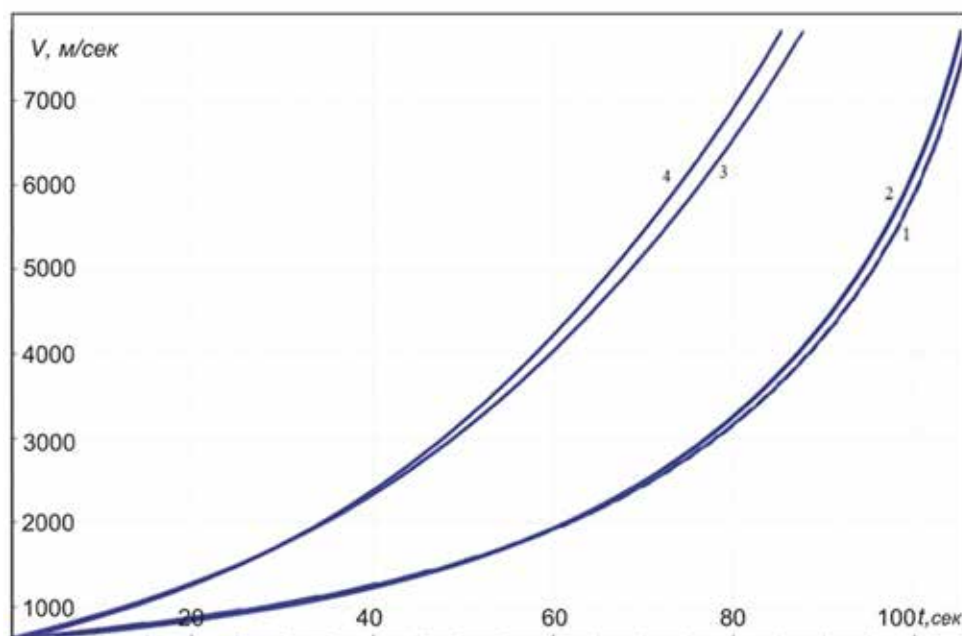


Рис. 2. Изменение окружной скорости ракеты при выводе ее на низкую орбиту Земли

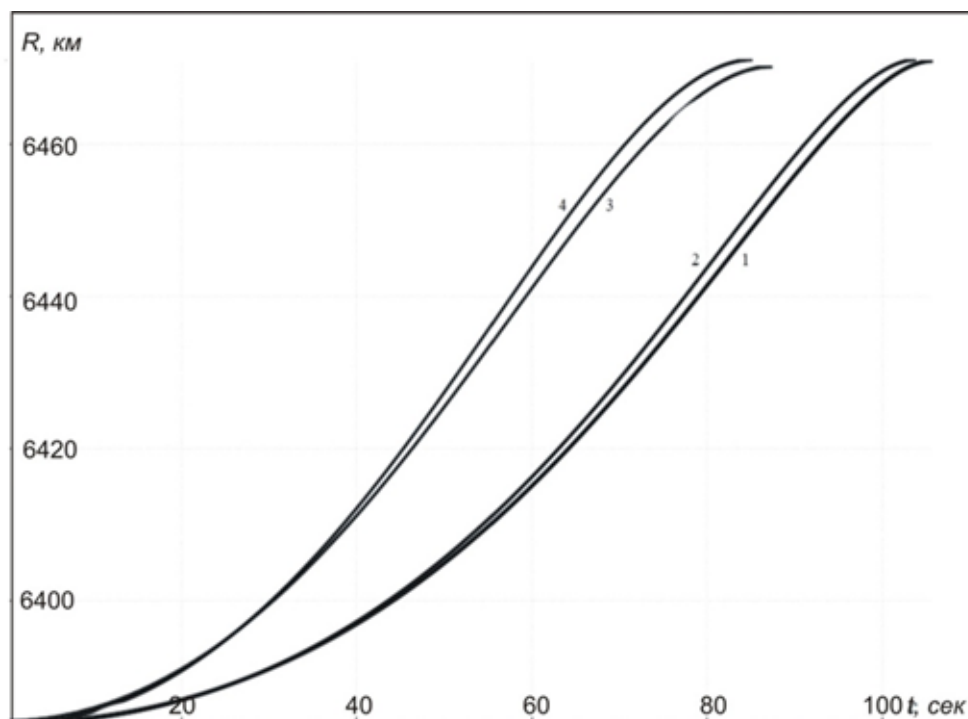


Рис. 3. Изменение радиуса (расстояния от центра Земли) при выводе ракеты на орбиту

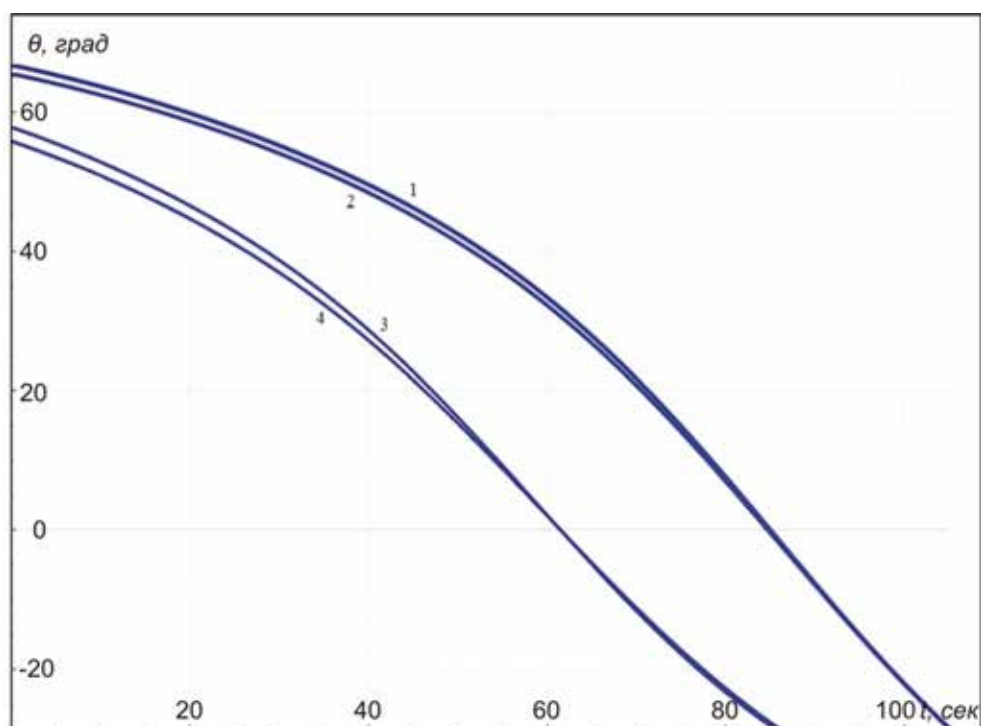


Рис. 4. Изменение оптимального угла действия тяги при выводе ракеты на орбиту

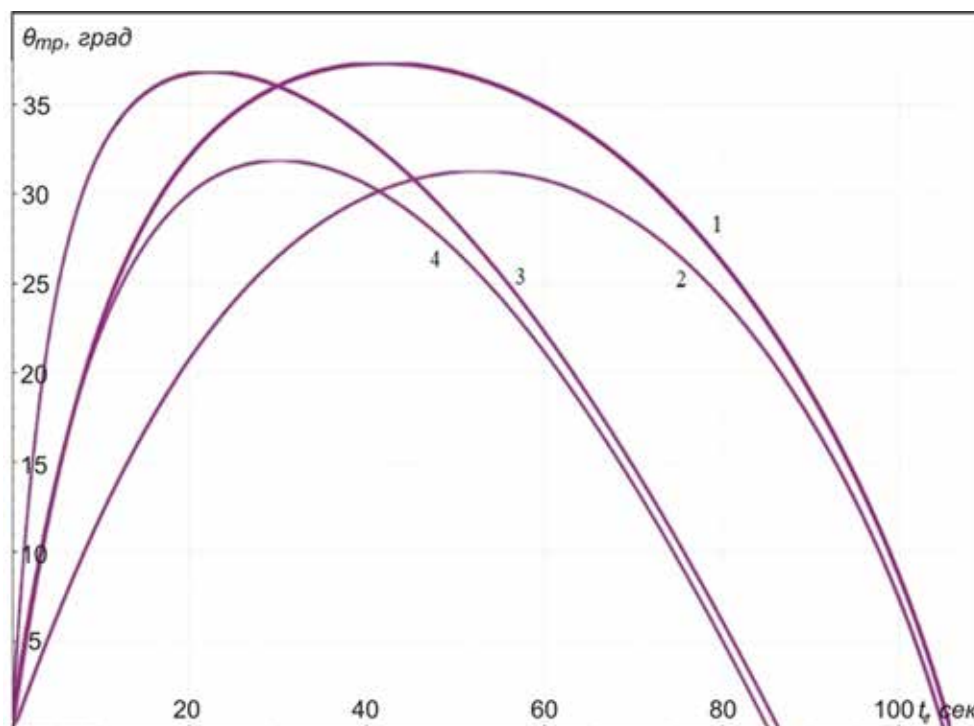


Рис. 5. Изменение траекторного угла при выводе ракеты на орбиту

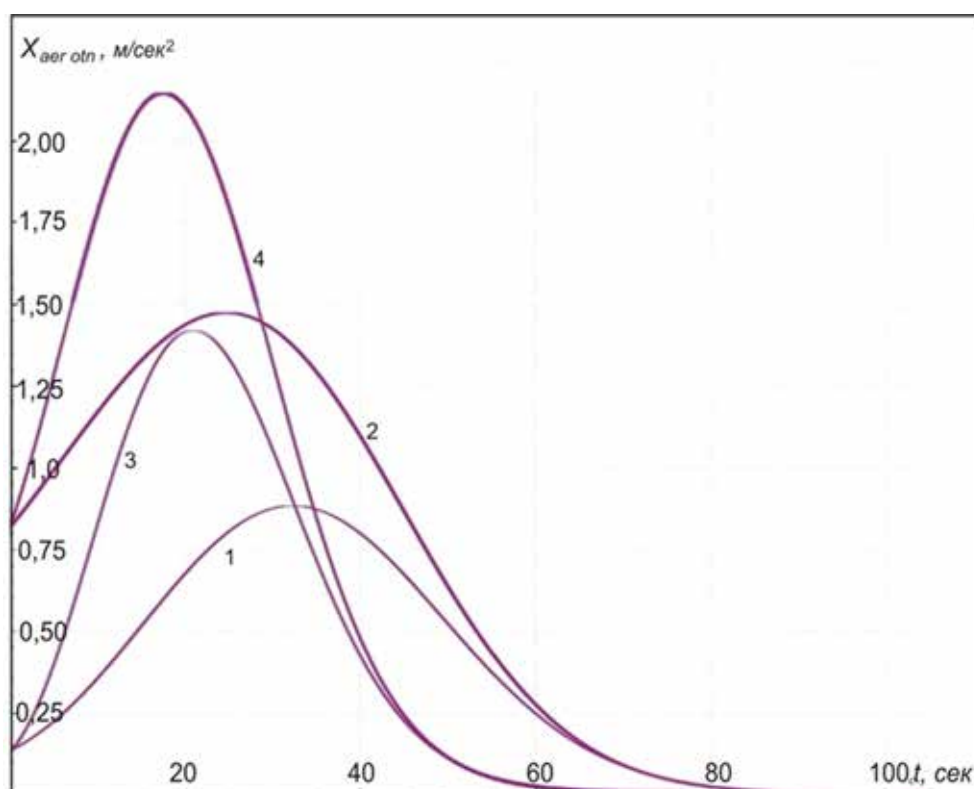


Рис. 6. Изменение величины относительного аэродинамического сопротивления X_{aer} / m (ускорения от силы аэродинамического сопротивления) при выводе ракеты на орбиту

Потребная для вывода на орбиту относительная масса топлива

Номер варианта	V_0 , м/с	J , м/с	T , с	Относительная масса топлива, %
1	236,11	2000	105,819	95,24
2	600	2000	105,269	94,74
3	236,11	4000	86,5976	77,94
4	600	4000	85,4353	76,89

Следует отметить, что такая пара окислитель – горючее, как кислород и водород, дающие импульс, близкий к 4000 м/с, может не обеспечить теоретического выигрыша, так как водород обладает низкой плотностью, что приведет к увеличению размеров топливных баков и изменению габаритов ракеты. Это может сказаться на ухудшении аэродинамических показателей и в результате на увеличении времени вывода ракеты на орбиту.

Список литературы

1. Пегас (ракета-носитель). Материал из Википедии. [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D0%B3%D0%B0%D1%81_\(%D1%80%D0%B0%D0%BA%D0%B5%D1%82%D0%B0-%D0%BD%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D0%B3%D0%B0%D1%81_(%D1%80%D0%B0%D0%BA%D0%B5%D1%82%D0%B0-%D0%BD%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C)) (дата обращения: 07.11.22).
2. Пегов В.И., Киселев В.И. Аналитическое представление аэродинамических характеристик летательных ап-

паратов сложной формы // Наука ЮУрГУ: материалы 66-й научной конференции секции технических наук. 2014. С. 1728–1739.

3. ГОСТ 4401-81 Группа Т27 межгосударственный стандарт атмосфера стандартная. М.: Стандартгиз, 1949.

4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 486 с.

5. Мозжорина Т.Ю. Численное решение задач оптимального управления с переключением методом пристрелки // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 2 (14). С. 94–106.

6. Мозжорина Т.Ю., Чуванова Л.О. Моделирование и оптимизация перелета спутников малой массы с земной орбиты на орбиту Марса с помощью ионных двигателей // Математическое моделирование и численные методы. 2021. № 2. С. 54–67. URL: <https://mmcm.bmstu.ru/articles/250/> (дата обращения: 09.12.2022).

7. Синицын А.А. Расчет траектории межпланетного перелета Земля – Марс с малой тягой без использования метода грависфер. [Электронный ресурс]. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80987> (дата обращения: 29.05.2021).