СТАТЬИ

УДК 519.111.8:517.977.55

АЛГОРИТМ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аширбаев Б.Ы., Алтымышова Ж.А.

Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова, Бишкек, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru, jaltymyshova@gmail.com

В данной статье построен алгоритм приближенного решения линейной стационарной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления. Так как движения рассмотренной системы являются разнотемповыми, то для построения решений исходной задачи необходимо выбрать управляющую функцию, в которой подсистемы, описывающие медленные и быстрые движения, решались бы независимо друг от друга. В работе такой подход осуществляется с помощью замены переменных в исходной системе. Однако в этом случае вытекает необходимость нахождения решений матричных уравнений Риккати и Ляпунова, которые в работе определяются с помощью степенных рядов путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра. Полученная система полностью заменяет исходную систему, выполняет условия управляемости и зависит от решений уравнений Риккати и Ляпунова, которые появились в процессе разделения данной системы. Построения оптимального управления производятся в медленной и быстрой подсистемах независимо друг от друга, с учетом соблюдения условия, указанного в работе, то есть исходное оптимальное управление выражается через обратную матрицу и возникает требование ее существования при построении алгоритма решений задачи. Этот факт также подтверждается рассмотренным в работе примером. Предложенный алгоритм решений линейной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления может эффективно применяться при исследовании задач оптимального управления с дискретными и цифровыми системами управления, такие свойства, как управляемость, наблюдаемость и стабилизируемость системы, а также при построении приближенного решения алгебраических матричных уравнений Риккати и Ляпунова.

Ключевые слова: управляемость системы, разнотемповые движения системы, цифровые системы управления, с уравнения Риккати и Ляпунова, обственные значения матрицы, матрицы простой структуры

ALGORITHM AND NUMERICAL SOLUTION OF A LINEAR SINGULARLY PERTURBED DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Ashirbaev B.Y., Altymyshova Zh.A.

N. Isanov Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture, Bishkek, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru, jaltymyshova@gmail.com

In this article, an algorithm for the approximate solution of a linear stationary singularly perturbed discrete optimal control problem is constructed. Since the motions of the considered system are of different tempos, in order to construct solutions to the original problem, it is necessary to choose a control function in which the subsystems describing slow and fast motions were solved independently of each other. In this paper, this approach is carried out by changing variables in the original system. However, in this case it is necessary to find solutions to the matrix equations of Riccati and Lyapunov, which are determined in the work using power series by equating the coefficients at the same powers of a small parameter. The resulting system completely replaces the original system, the controllability conditions are satisfied, and it depends on the solutions of the Riccati and Lyapunov equations that appeared in the process of separating this system. The construction of the optimal control is carried out in the slow and fast subsystems independently of each other, taking into account the observance of the conditions specified in the work, that is, the initial optimal control is expressed through the inverse matrix and the requirement arises for its existence when constructing an algorithm for solving the problem. This fact is also confirmed by the example considered in the work. The proposed algorithm for solving a linear singularly perturbed discrete optimal control problem can be effectively used in the study of optimal control problems with discrete and digital control systems, such properties as controllability, observability and stabilizability of the system, as well as in constructing an approximate solution of the Riccati and Lyapunov algebraic matrix equations.

Keywords: controllability of the system, multi-tempo motions of the system, Riccati and Lyapunov equations, digital control systems, matrix eigenvalues, matrices of simple structure

Дискретные динамические модели образуются при моделировании дискретных процессов [1] или при дискретизации непрерывных моделей [2], а также при моделировании многих технических, экономических задач и задач автоматического управления, в которых используются дискретные модели оптимального управления [3–5].

Такая необходимость вытекает из всеобщей цифровизации общества. Это означает, что цифровые устройства, информацию получают или передают в дискретные моменты времени. В связи со сложностью построения аналитических решений дискретных задач оптимального управления, широко используется асимптотический метод построения решений таких задач [6, 7].

Цель данной работы состоит в построении асимптотического алгоритма решений линейной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом. Сингулярно-возмущенные системы дифференциальных уравнений в настоящее время активно развиваются и применяются для решения широкого круга задач в различных отраслях науки [8–10]. Такие системы появляются естественным образом в процессе моделирования и исследования объектов различной природы, способных одновременно совершать быстрые и медленные движения [8–10]. В связи с этим актуальной является задача разделения медленных и быстрых движений системы. Построению оптимальных решений в задачах с разнотемповыми динамическими системами с разделением движений посвящено множество работ, а именно в сингулярно-возмущенных системах [8–11] и в дискретных задачах оптимального управления [12–14]. Данная работа является продолжением исследований дискретной задачи оптимального управления.

1. Алгоритм решений задачи

В этом разделе вводим разностное сингулярно-возмущенное уравнение с –постоянными матрицами. Сначала формулируется условие, необходимое для выполнения исследуемой системы.

1.1. Постановка задачи

Объект управления описывается разностным уравнением

$$y(t+T) = Ay(t) + Bu(t), \qquad (1)$$

где

$y(t) = (x(t)z(t))', x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^m$ – векторы переменных состояния,

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\mu}A_3 & \frac{1}{\mu}A_4 \end{pmatrix}, B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\mu}B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 - (n \times n), \quad A_2 - (n \times m), \quad A_3 - (m \times n),$$

$$A_4 - (m \times m), \quad B_1 - (n \times r), B_2 - (m \times r) -$$

постоянные матрицы, $u(t) \in R^r -$ вектор управления, $t = kT, k = 0,1,\cdots,M-1$, $M = \dfrac{1}{T}, T -$ малый шаг, $0 \leq T \leq 1$, μ – малый параметр, $0 < \mu < 1$, штрих обозначает транспонирование.

Систему (1) перепишем в виде

$$x(t+T) = A_1x(t) + A_2z(t) + B_1u(t), \quad (2)$$

$$\mu z(t+T) = A_3x(t) + A_4z(t) + B_2u(t).$$

Для системы (1) заданы начальные и конечные состояния:

$$y(0) = y_0 = (x(0)z(0))' = (x_0\, z_0)', \quad (3)$$

$$y(MT) = y(1) = y_M = \quad 1 \quad 1 \qquad , \qquad .$$

$$= (x(1)z(1))' = (x_M, z_M)'. \qquad (4)$$

Предположим выполнения для системы (1).

Условие 1. Собственные значения матрицы A_4 удовлетворяют неравенству

$$\left|Re\lambda_j\right| \leq \gamma < 1, j = \overline{1,m},$$

где γ – некоторая постоянная.

При выполнении условия (1), рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J = \sum_{i=0}^{M-1} u'(iT)u(iT) \qquad (5)$$

при ограничениях (2)–(4).

Как показано в [10, 13, 14], используя замены

$$x(t,\mu) = \tilde{x}(t,\mu) - \mu N\tilde{z}(t,\mu), \qquad (6)$$

$$z(t,\mu) = \tilde{z}(t,\mu) + Hx(t,\mu), \qquad (7)$$

из системы (2) получаем

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1u(t), \qquad (8)$$

$$\mu\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t). \qquad (9)$$

где

$$\tilde{A}_1 = A_1 + A_2H, \tilde{A}_4 = A_4 - \mu HA_2, \qquad (10)$$

$$\tilde{B}_1 = B_1 + N\tilde{B}_2,\ \tilde{B}_2 = B_2 - \mu HB_1.$$

Матрицы H и N имеют размерности $m \times n$ и $n \times m$ соответственно и удовлетворяют следующим матричным уравнениям Риккати и Ляпунова [8, 10, 14]:

$$\mu HA_1 + \mu HA_2H = A_3 + A_4H, \qquad (11)$$

$$\mu\tilde{A}_1N - N\tilde{A}_4 - A_2 = 0. \qquad (12)$$

Уравнения (11), (12) имеют решения в виде равномерно сходящихся степенных рядов [8, 10, 14]:

$$H(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i\mu^i, N(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k\mu^k. \quad (13)$$

Матрицы $H_i(\mu)$ и $N_k(\mu)$ $(i,k = 0,1,\ldots)$ определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (11), (12). В результате имеем [8, 10, 14]:

$$H_0 = -A_4^{-1}A_3,\ \ H_1 = A_4^{-1}\left(H_0A_1 + H_0A_2H_0\right),\cdots, \tag{14}$$

$$H_i = A_4^{-1}\left(H_{i-1}A_1 + \sum_{j=0}^{i-1}H_jA_2H_{v-1}\right), i = 1,2,\cdots, v = i, i-1, i-2,\cdots,$$

$$N_0 = -A_2A_4^{-1},\ \ N_1 = \left(A_1N_0 + A_2H_0N_0 + N_0H_0A_2\right)A_4^{-1},\cdots, \tag{15}$$

$$N_k = \left[A_1N_{k-1} + A_2\left(\sum_{j=0}^{k-1}H_jN_{s-1}\right) + \left(\sum_{j=0}^{k-1}N_jH_{s-1}\right)A_2\right]A_4^{-1},\quad k = 1,2,\cdots, s = i, i-1, i-2,\cdots.$$

Граничные условия системы (8) и (9) определяются соотношениями

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0,\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \tag{16}$$

$$\tilde{x}(M) = \tilde{x}_M,\ \tilde{z}(M) = \tilde{z}_M, \tag{17}$$

где

$$\tilde{x}_0(\mu) = x_0 + \mu N_0\tilde{z}_0,\ \tilde{z}_0 = z_0 - H_0x_0, \tag{18}$$

$$\tilde{x}_M(\mu) = x_M + \mu N_M\tilde{z}_M,$$

$$\tilde{z}_M = z_M - H_Mx_M,\ \tilde{z}_M^* = \mu^M\cdot\tilde{z}_M. \tag{19}$$

В результате получили систему, состоящую из двух уравнений (8) и (9), которые решаются независимо друг от друга.

1.2. Вывод формулы задачи

Теперь рассмотрим задачу (5), (8)–(10), (16)–(19). Для системы (8), (9) предположим выполнение следующих условий:

Условие 2. Матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ являются матрицами простой структуры и не имеют нулевых собственных значений $\lambda_s\left(s = \overline{1,n}\right)$, $\gamma_k\left(k = \overline{1,m}\right)$ соответственно.

Условие 3. Для собственных значений $\lambda_s\left(s = \overline{1,n}\right)$, $\gamma_k\left(k = \overline{1,m}\right)$ матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ выполняются следующие ограничения:

$$|\lambda_s| \le q_1 < 1, |\gamma_k| \le q_2 < 1.$$

По второму условию матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ не имеют нулевых собственных значений, тогда собственные значения матрицы $\tilde{A}_1^{-1}$, $\tilde{A}_4^{-1}$ соответственно равны $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_s^{-1}$ γ_1^{-1}, $\gamma_2^{-1},\cdots\gamma_k^{-1}$, а соответствующие их собственные векторы совпадают с собственными векторами

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s \text{ и } \gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k.$$

Решения системы (8), (9) с начальными условиями (16), (18) представим в виде

$$\tilde{x}(kT) = \tilde{A}_1^k\tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\tilde{A}_1^{k-i-1}\tilde{B}_1u(iT), \tag{20}$$

$$\tilde{z}(kT) = \mu^{-k}\tilde{A}_4^k\tilde{z}_0 + \mu^{-k}\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{A}_4^{k-i-1}\tilde{B}_2u(iT). \tag{21}$$

С учетом конечных условий (17), (19) из (20) и (21) имеем

$$\sum_{i=0}^{M-1}\tilde{A}_1^{M-i-1}\tilde{B}_1u(iT) = \alpha_{1M},$$

$$\alpha_{1M} = \tilde{x}_M(\mu) - \tilde{A}_1^M\tilde{x}_0. \tag{22}$$

$$\sum_{i=0}^{M-1}\tilde{A}_4^{M-i-1}\tilde{B}_2u(iT) = \alpha_{2M},$$

$$\alpha_{2M} = \tilde{z}_M^* - \tilde{A}_4^M\tilde{z}_0. \tag{23}$$

На основании теории проблемы моментов [8, 15] соотношения (22) и (23) выражают необходимые и достаточные условия, которые должны удовлетворять функция $u(kT), k = 0,1,\cdots,M-1$, чтобы системы (8), (9) переводились из заданного начального состояния (16) в заданное конечное состояние (17) [8, 15]. Кроме того, функция $u(kT)$ должна доставлять минимум функционалу (5). Однако движения системы (8) и (9) являются разнотемповыми. В связи с этим совместное решение уравнений (22) и (23) не является возможным [8, 15]. Так как для того, чтобы быструю подсистему (9) переводить из заданного начального состояния (16) в конечное состояние (17), необходимо найти функцию $u(kT)$, удовлетворяющую уравнению (23), а также найденная функция $u(kT)$ выражается через обратную матрицу и возникает требование ее существования при $\mu \to 0$ [8, 15].

Поэтому для подпространства переменных состояния $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ необходимо выбрать оптимальное управление, в котором каждое уравнение (22) и (23) решается независимо друг от друга относительно неизвестных параметров.

Исходя из этих требований оптимальное управление будем искать в виде

$$u(iT) = \begin{cases} \tilde{B}_1'\left(\tilde{A}_1'\right)^{M-i-1} C_1, \text{ для } \tilde{x} \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_M] \subset R^n, \\ \tilde{B}_2'\left(\tilde{A}_4'\right)^{M-i-1} C_2, \text{ для } \tilde{z} \in [\tilde{z}_0, \tilde{z}_M] \subset R^m. \end{cases} \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22) и (23), получаем уравнения

$$W_1 \cdot C_1 = \alpha_{1M}, \quad (25)$$

$$W_2 \cdot C_2 = \alpha_{2M}, \quad (26)$$

где

$$W_1 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_1^{M-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' \left(\tilde{A}_1'\right)^{M-i-1},$$

$$W_2 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_4^{M-i-1} \tilde{B}_2 \tilde{B}_2' \left(\tilde{A}_4'\right)^{M-i-1}. \quad (27)$$

Матрицы W_1 и W_2 положительно определенные [8, 10], следовательно, оптимальные управления и соответствующие оптимальные траектории для системы (8) и (9) определяются в формах

$$u(kT, \tilde{x}_0, \tilde{x}_M) = \tilde{B}_1'\left(\tilde{A}_1'\right)^{M-k-1} \cdot W_1^{-1} \alpha_{1M}, \quad (28)$$

$$u(kT, \tilde{z}_0, \tilde{z}_M^*) = \tilde{B}_2'\left(\tilde{A}_4'\right)^{M-k-1} \cdot W_2^{-1} \alpha_{2M}, \quad (29)$$

$$\tilde{x}(kT) = \tilde{A}_1^k \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_1^{k-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' \left(\tilde{A}_1'\right)^{k-i-1} \cdot W_1^{-1} \alpha_{1M}, \quad (30)$$

$$\tilde{z}(kT) = \mu^{-k} \cdot \tilde{A}_4^k \tilde{z}_0 + $$

$$+ \mu^{-k} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_4^{k-i-1} \tilde{B}_2 \tilde{B}_2' \left(\tilde{A}_4'\right)^{k-i-1} \cdot W_2^{-1} \alpha_{2M}. \quad (31)$$

1.3. Алгоритм решений задачи

Исходя из полученных формул алгоритм решений задачи (1)–(5) состоит в следующем:

1) вводится массив исходных данных системы(1): матрицы $A_i\left(i = \overline{1,4}\right), B_j\left(j = 1,2\right)$, начальные и конечные условия x_0, x_M, z_0, z_M период квантования T, количество шагов M, μ – малый шаг;

2) проверяется выполнения условий 1. Если условие 1 выполняется переход осуществляется к пункту 3, иначе к пункту 1;

3) по формулам (13)–(15) определяются матрицы H и N;

4) проверяются подстановкой матриц H и N в уравнения (11) и (12) соответственно. Если матрицы H и N удовлетворяют уравнения (11) и (12), то переход осуществляется к пункту 5, иначе к пункту 3;

5) по формулам (10) определяются матрицы: $\tilde{A}_1, \tilde{A}_4, \tilde{B}_2$ и $\tilde{B}_1$;

6) проверяется выполнения условий 3 для матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$. Если условие 3 выполняется, переход осуществляется к пункту 7, иначе к пункту 3;

7) по формулам (18), (19) определяются начальные $\tilde{x}_0$, $\tilde{z}_0$ и конечные условия $\tilde{x}_M$, $\tilde{z}_M$, $\tilde{z}_M^*$;

8) по формулам (22) и (23) определяются матрицы: α_{1M} и α_{2M};

9) по формулам (27) определяются матрицы: W_1, W_2, W_1^{-1}, W_2^{-1};

10) по формулам (28) и (29) определяются оптимальные управления $u(kT, \tilde{x}_0, \tilde{x}_M)$ и $u(kT, \tilde{z}_0, \tilde{z}_M^*)$;

11) по формулам (30) и (31) определяются оптимальные траектории $\tilde{x}(kT)$ и $\tilde{z}(kT)$.

2. Численное моделирование

В этом разделе рассмотрим задачу (1)–(5) для конкретных значений параметров системы (1), где матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.2 & -0.1 & 0.3 & -0.01 \\ 0.4 & -0.6 & -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ -0.15 & -0.1 & 0 & -0.25 & 0.2 \\ 0.12 & -0.1 & 0 & -0.25 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.1760 & 0 & 0 & -0.8526 & -0.2560 \\ 0 & -0.1346 & -0.1106 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6900 & 0.1017 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1990 & -0.2930 & 0 & 0 \\ -0.3660 & 0 & 0 & -0.5286 & -0.1680 \\ 0.6020 & 0 & 0 & -0.8540 & -0.1884 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -0.0610 & -0.1880 & 0 & -0.1130 & -0.0770 \\ -0.2400 & 0 & 0 & 0.0200 & 0 & 0 \\ 0.6900 & 0 & 0 & 0.3040 & 0 & 0 \\ -0.1990 & 0 & 0 & -0.8760 & 0.2000 & 0 \\ 0 & -0.3660 & 0.2360 & -0.1167 & -0.7000 & -0.0050 \\ 0 & 6.1000 & -0.1880 & 0 & -0.1130 & -0.3880 \end{pmatrix},$$

$B_1 = (0;0;0;0;0)'$, $B_2 = (-7.280;0;0;0;-0.478;-7.280)'$; малый параметр – $\mu = 0.0003$;
начальные и конечные условия – $x_0 = (1;1;1;1;1)'$, $z_0 = (1;1;1;1;1;1)$.

Далее по алгоритму решений задачи (п. 1.3) производятся численные расчеты:

1. Вычисление собственных значений матрицы A_4 показывает, что условие 1 выполняется:

$$(eig(A_4) = (0.1149 + 0.4959\mathrm{i}; 0.1149 - 0.4959\mathrm{i}; -0.7882 + 0.1497\mathrm{i}; -0.7882 - 0.1497\mathrm{i}; -0.6322; 0.0147)'.$$

2. Для определения матрицы H и N находим

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3.5039 & 0.2305 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0331 & 17.8381 & 6.9972 & 2.7485 & 0.6530 & -0.2134 \\ 1.2453 & 117.2385 & 45.9590 & 17.9623 & 4.9813 & -0.3113 \\ 0 & 7.9530 & 2.7663 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31.3476 & 12.3456 & 5.0000 & 0 & 0 \\ -16.8460 & -346.3798 & -135.8725 & -53.3712 & -12.6795 & 0.9292 \end{pmatrix}.$$

По формулам (14) последовательно вычисляем: H_0, H_1, ... H_7. В результате из (13) при $\mu = 0.0003$ имеем

$$H(\mu) = \begin{pmatrix} -0.0019 & -0.3120 & -0.4099 & 0.0009 & -0.0014 \\ 0.2674 & 7.1932 & 2.1874 & 1.1165 & 0.4071 \\ 2.3076 & 47.2079 & 14.3377 & 3.9019 & 1.5599 \\ 0.0303 & 3.1654 & 0.6420 & 0.0263 & 0.0270 \\ 0.1339 & 12.5884 & 3.8769 & 0.1212 & 0.1197 \\ -3.7560 & -139.4209 & -42.4257 & -21.6607 & -7.6303 \end{pmatrix}.$$

Проверка показала, что матрица $H(\mu)$ с точностью $O(\mu^7)$ удовлетворяет уравнению (11):

$$\mu HA_1 + \mu HA_2H - A_3 + A_4H = (1.0\mathrm{e}-05)* \begin{pmatrix} -0.0003 & -0.0005 & 0 & 0 & -0.0002 \\ 0.0056 & -0.0277 & -0.0115 & -0.0050 & 0.0026 \\ 0.0425 & -0.0957 & -0.0508 & -0.0207 & 0.0245 \\ 0.0030 & -0.0003 & -0.0015 & -0.0005 & 0.0020 \\ 0.0128 & -0.0045 & -0.0076 & -0.0026 & 0.0084 \\ -0.1082 & 0.4745 & 0.2022 & 0.0875 & -0.0527 \end{pmatrix}.$$

Далее аналогично, по формулам (15) последовательно вычисляем: N_0, N_1, ... N_7 и в результате из (13) имеем

$$N(\mu)=\begin{pmatrix} -0.0046 & 3.3369 & -0.2961 & -0.0259 & -0.0078 & 0.0003 \\ -1.0657 & -18.1917 & -7.1304 & -2.7560 & -0.6322 & 0.2350 \\ -0.0081 & -7.9147 & -2.7499 & 0.0222 & 0.0146 & 0.0070 \\ -0.0480 & -31.5910 & -12.4337 & -4.9636 & 0.0465 & 0.0331 \\ 18.4498 & 391.6852 & 153.5438 & 59.2784 & 13.7576 & -1.5644 \end{pmatrix}$$

Подставляя $N(\mu)$ в (12), убеждаемся, что она удовлетворяет уравнению (12) с точностью $O(\mu^7)$.

$$\mu\tilde{A}_1N-N\tilde{A}_4-A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0009 & 0.0003 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0014 & 0.0006 & 0.0002 & 0 & 0 \\ -0.0007 & -0.0161 & -0.0065 & -0.0022 & -0.0005 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

Итак, получаем разделенные переменных состояния системы (8) и (9), где

$$\tilde{A}_1=\begin{pmatrix} 0.5181 & -0.1120 & -0.5099 & 0.3009 & -0.0114 \\ 0.6674 & 6.5932 & 1.8874 & 1.3165 & 0.6071 \\ -0.1197 & 3.2654 & 0.6420 & -0.2237 & 0.2270 \\ 0.2539 & 12.4884 & 3.8769 & 0.7212 & 1.0197 \\ -3.5560 & -138.8209 & -42.0257 & -21.6607 & -7.5303 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_4=\begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0609 & -0.1880 & 0.0001 & -0.1130 & -0.0770 \\ -0.2401 & -0.0022 & 0 & 0.0193 & -0.0003 & -0.0001 \\ 0.6893 & -0.0142 & 0 & 0.2997 & -0.0012 & -0.0005 \\ -0.1990 & -0.0009 & 0 & -0.8762 & 0.2000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.3698 & 0.2360 & -0.1179 & -0.7000 & -0.0050 \\ 0.0011 & -6.0582 & -0.1880 & 0.0127 & -0.1065 & -0.3857 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_1=B_1+N\tilde{B}_2=(0.0350;6.3503;0.0017;0.0865;-129.5017)',$$

$$\tilde{B}_2=B_2-\mu HB_1=(-7.2800;0;0;0;-0.4780;-7.2800)'.$$

Граничные условия системы (8) и (9) имеют вид

$$\tilde{z}_0=(1.7235;-9.3121;-62.7905;-2.5775;-14.4193;199.6575)',$$

$$\tilde{z}_0^*=(1.0177\text{e-}35;\ -5.4987\text{e-}35;\ -3.7077\text{e-}34;\ -1.5220\text{e-}35;\ -8.5145\text{e-}35;\ 1.1790\text{e-}33)'.$$

$$\tilde{x}_0=(1;1;1;1;1)',$$

$$\tilde{z}_M=(0;0;0;0;0;0)',\ \tilde{z}_M^*=\mu^M\cdot\tilde{z}_M=(0;0;0;0;0;0)',\ \tilde{x}_M=(0;0;0;0;0)'.$$

Согласно пункту 6 проверка условий (3) показывает, что она выполняется:

$$\mathrm{eig}\,\tilde{A}_1 = \big(0.8773 + 6.6804i; 0.8773 - 6.6804i; 0.4430; \\ -0.6268 + 0.0762i; -0.6268 - 0.0762i\big)'$$

$$\mathrm{eig}\,\tilde{A}_4 = \big(0.1153 + 0.4958i; 0.1153 - 0.4958i; -0.7880 + 0.1498i; \\ -0.7880 - 0.1498i; -0.6321; 0.0135\big)'.$$

Согласно пункту 8 по формулам (22) и (23) определяются матрицы: α_{1M} и α_{2M}:

$$\alpha_{1M} = (1.0e+09)*(-0.0111; -0.2371; -0.0694; -0.3620; 6.1360),$$

$$\alpha_{2M} = (-0.0990; -0.0394; -0.0633; 0.4662; -0.1671; -0.5998).$$

Согласно пункту 9 по формулам (27) определяются матрицы: W_1, W_2, W_1^{-1}, W_2^{-1}:

$$W_1 = (1.0e+21)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0.0002 & 0 & 0.0002 & -0.0079 \\ 0.0002 & 0.0011 & 0.0002 & 0.0015 & -0.0501 \\ 0 & 0.0002 & 0 & 0.0003 & -0.0089 \\ 0.00018 & 0.0015 & 0.0003 & 0.0020 & -0.0651 \\ -0.0079 & -0.0501 & -0.0089 & -0.0651 & 2.3613 \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 52.9985 & 0.0003 & -0.0009 & 0.0002 & 3.4799 & 52.9989 \\ 0.0003 & 0.0009 & -0.0026 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0015 \\ -0.0009 & -0.0026 & 0.0075 & -0.0020 & -0.0006 & -0.0043 \\ 0.0002 & 0.0007 & -0.0020 & 0.0005 & 0.0002 & 0.0012 \\ 3.4799 & 0.0002 & -0.0006 & 0.0002 & 0.2285 & 3.4802 \\ 52.9989 & 0.0015 & -0.0043 & 0.0012 & 3.4802 & 53.0009 \end{pmatrix},$$

$$W_1^{-1} = \begin{pmatrix} -0.0432 & -0.0167 & 0.0003 & 0.0071 & -0.0003 \\ -0.0022 & -0.0025 & -0.0012 & 0.0016 & 0 \\ 0.0123 & 0.0027 & -0.0002 & -0.0008 & 0.0001 \\ -0.0038 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0002 & 0 \\ -0.0003 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_2^{-1} = (1.0e+18)\times\begin{pmatrix} -0.0006 & -0.0383 & -0.0158 & -0.0099 & -0.0018 & 0.0007 \\ -0.0385 & -2.3527 & -0.9721 & -0.6103 & -0.1076 & 0.0456 \\ -0.0159 & -0.9715 & -0.4014 & -0.2519 & -0.0445 & 0.0188 \\ -0.0099 & -0.6080 & -0.2511 & -0.1572 & -0.0279 & 0.0117 \\ -0.0018 & -0.1079 & -0.0446 & -0.0281 & -0.0049 & 0.0021 \\ 0.0007 & 0.0454 & 0.0188 & 0.0117 & 0.0021 & -0.0009 \end{pmatrix}.$$

Результаты численных расчетов задачи (1)–(5) приведены на рис. 1–4.

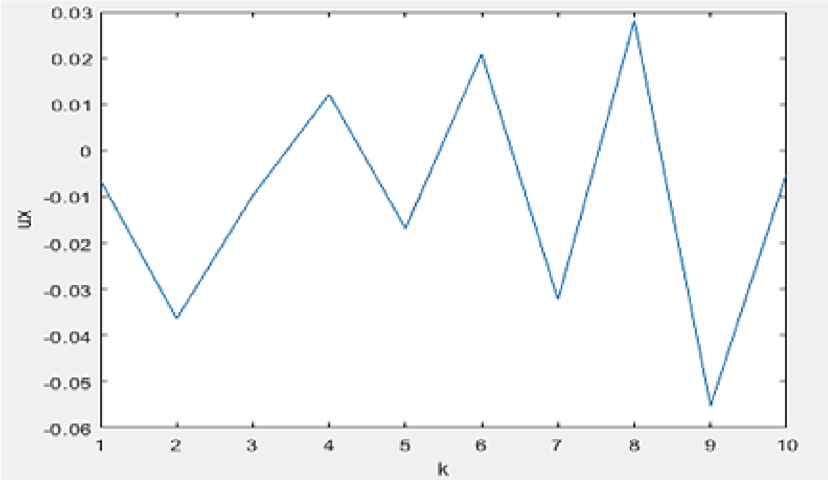

Рис. 1. Результат расчета $u\left(kT,\tilde{x}_0,\tilde{x}_M\right)$ *по формуле (28)*

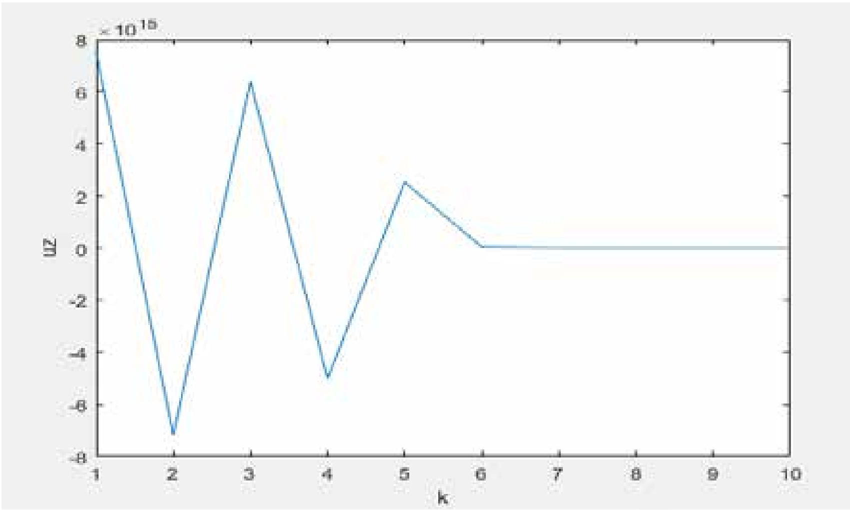

Рис. 2. Результат расчета $u\left(kT,\tilde{z}_0^*,\tilde{z}_M^*\right)$ *по формуле (29)*

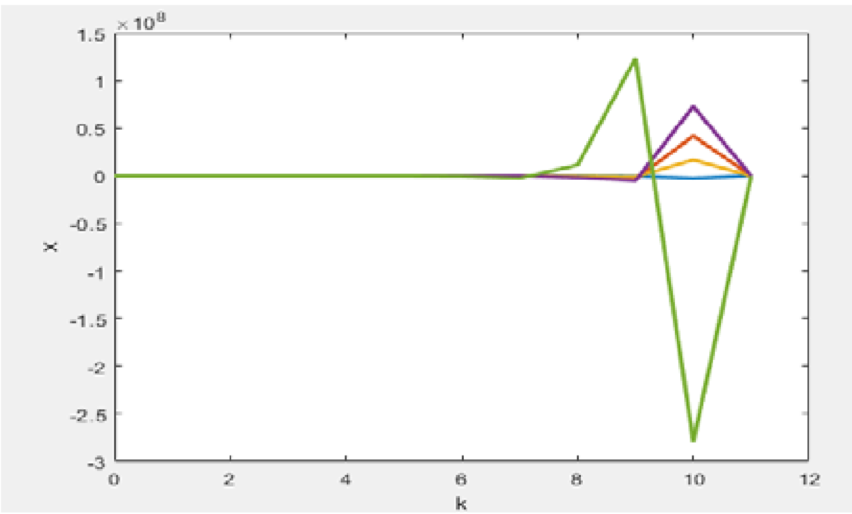

Рис. 3. Результат расчета $\tilde{x}\left(kT\right)$ *по формуле (30)*

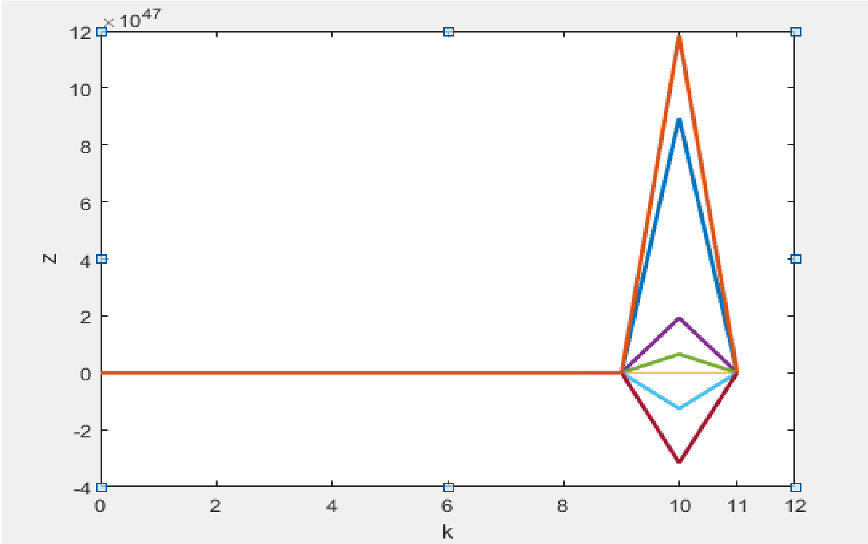

Рис. 4. Результат расчета $\tilde{z}(kT)$ *по формуле (31)*

Заключение

Полученный алгоритм решений линейной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом на основе разделения переменных состояния системы [13, 14] позволяет существенно понизить порядок исследуемой системы. Полученная при этом эквивалентная система обладает всеми свойствами управляемости и стабилизируемости исходной системы, причем они связаны только управляющей функцией.

Предложенный способ может эффективно применяться при исследовании теории оптимальных цифровых систем управления и при построении приближенного решения алгебраических матричных уравнений Риккати и Ляпунова.

Список литературы

1. Сазанова Л.А. Дискретная модель управления запасами как задача оптимального управления // Вестник ВГУ. Серия: Экономика и управление. 2017. № 3. С. 184–187.

2. Малтугуева Н.С. Методы решения задач оптимального управления непрерывно-дискретными системами и их связь с необходимыми условиями оптимальности // Программные системы: теория и приложения. 2012. Т. 3. Выпуск 5. С. 93–101.

3. Бортаковский А.С., Коновалова А.А. Синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С. 38–70.

4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления: учебное пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.

5. Муромцев Д.Ю., Яшин Е.Н. Анализ и синтез дискретных систем: учебное пособие. Тамбов: Издательство ФГБОУ ВПО ТГТУ, 2011. 108 с.

6. Глизер В.Я. Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1681–1691.

7. Глизер В.Я. Об одной разностной задаче оптимального управления с малым шагом // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1440–1442.

8. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Асимптотическое решение сингулярно-возмущенной задачи оптимального управления с минимальной энергией // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2020. № 3. С. 89–97.

9. Соболев В.А., Осинцев М.С. Метод интегральных многообразий в задачах оптимального управления сингулярно-возмущенными системами // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, ИПУ РАН. 2014. С. 769–779.

10. Аширбаев Б.Ы., Апышова Г.Ж. Асимптотическое решение линейной сингулярно-возмущенной задачи оптимального быстродействия // Наука, новые технологии и инновации. Бишкек. 2021. № 7. С. 3–9.

11. Воропаева Н.В. Декомпозиция разнотемповых динамических систем со слабой диссипацией // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. Вып. 9/2 (110). С. 5–10.

12. Воропаева Н.В. Декомпозиция задач управления разнотемповых систем с дискретным временем // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. ИПУ РАН. 2014. С. 842–848.

13. Аширбаев Б.Ы. Декомпозиция и алгоритм решения задач оптимального управления с малым шагом // Известия КГТУ им. И. Раззакова. Бишкек. 2016. № 3 (39). С. 25–31.

14. Аширбаев Б.Ы. Декомпозиция дискретной задачи оптимального управления с малым шагом на интегральных многообразиях // Проблемы современной науки и образования. 2017. № 6 (88). С. 6–9.

15. Иманалиев З.К., Кадыров Ч.А., Алымбаева Ж.А. Решение дискретной задачи оптимального управления с малым периодом квантования // Вестник КГУСТА им. Н. Исанова. Бишкек. 2015. № 4 (50). С. 187–190.