УДК 517.958

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ОПЕРАТОРОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ГДЕ ВЫРОЖДАЕТСЯ НЕКОРРЕКТНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Алыбаев А.М.

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, e-mail: anarbek.alybayev@mail.ru

Важность исследуемой работы основана на изучении некорректных задач абстрактного моделирования, поскольку многие процессы нашей окружающей среды зачастую описываются подобными дифференциальными уравнениями. Изучение же обратных задач приводит нас к операторным и интегральным уравнениям, методы решения которых заслуживают особого внимания. В работе исследуется многомерная обратная задача с оператором гиперболического типа, вырождающаяся в уравнения Вольтерра первого рода с особым решением. На основе разработанного алгоритма асимптотического характера, где содержится сингулярная функция относительно малого параметра, доказаны вопросы регуляризируемости в обобщенном смысле и единственности решения исходной задачи во введенном пространстве. Отметим, что изучаемое дифференциальное уравнение в частных производных в исследуемой некорректной обратной задаче обобщает уравнения, моделирующие движение жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почвогрунтах и др. В связи с этим результаты данной работы могут быть использованы и применены к указанным прикладным задачам для доказательства регуляризируемости в обобщенном смысле, в чем и заключается актуальность данной статьи. Таким образом, построение приближенного решения методами регуляризации, нахождение достаточного решения поставленной задачи посредством применения методов интегрализации и вспомогательной функции имеют место в данной работе.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, метод регуляризации, метод вспомогательной функции, обратная задача, особое решение, некорректная задача, интегральные уравнения Вольтерра первого рода

REGULARIZATION OF THE INVERSE PROBLEM WITH A HYPERBOLIC TYPE OPERATOR, WHERE THE INCORRECT VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND DEGENERATES

Alybaev A.M.

Kyrgyz National University named after Zh. Balasagyn, Bishkek, e-mail: anarbek.alybayev@mail.ru

The importance of the work under study is based on the study of ill-posed abstract modeling problems, since many processes in our environment are often described by such differential equations. The study of inverse problems leads us to operator and integral equations, the methods for solving which deserve special attention. In this paper, we study a multidimensional inverse problem with a hyperbolic type operator that degenerates into Volterra equations of the first kind with a special solution. On the basis of the developed asymptotic algorithm, which contains a singular function of a relatively small parameter, the questions of regularization in a generalized sense and the uniqueness of the solution of the original problem in the introduced space are proved. Note that the studied partial differential equation in the investigated ill-posed inverse problem generalizes the equations modeling the movement of fluid in fractured rocks, moisture transfer in soils, etc. In this regard, the results of this work can be used and applied to the indicated applied problems to prove regularization in a generalized sense, which is the relevance of this article. Thus, the construction of an approximate solution by regularization methods, finding a sufficient solution to the problem posed through the application of integration methods and an auxiliary function, are researched in this work.

Keywords: differential equations, regularization method, auxiliary function method, inverse problem, singular solution, ill-posed problem, Volterra integral equations of the first kind

В теории дифференциальных уравнений в частных производных исследованы различные прямые и обратные задачи, и для решения этих задач рассмотрены различные методы, связанные с функциями Римана, Грина, с преобразованиями Лапласа, Фурье и др., которые встречаются в работах [1–3] и т.д.

Большое значение в этой области имеют обратные задачи [4–6] и др., где вырождаются нелинейные интегральные уравнения первого или третьего рода с особыми решениями [3], так как исследования еще не завершены, т.е. не имеют общих методов решения. В некоторых случаях разработаны способы исследований, связанные с методами регуляризации, имеющие сингулярности относительно малого параметра [2].

В связи с этим в настоящей статье изучается многомерная коэффициентная обратная задача с дифференциальным оператором гиперболического типа, вырождающее двумерное интегральное уравнение первого рода с особым решением. Чтобы доказать регуляризируемость исследуемой обратной задачи в введенном пространстве, применяются: метод вспомогательной функции, метод регуляризации операторных уравнений и элементы математического и функционального анализов [7, 8].

Основной целью данного исследования является получение достаточного решения обратной задачи, вырожденной в интегральное уравнение первого рода посредством нахождения соответствующего регуляризирующего решения. Наряду с этим построение алгоритма асимптотического характера, где содержится сингулярная функция относительно малого параметра, также доказательство регуляризируемости в обобщенном смысле и единственности решения исходной задачи во введенном пространстве.

Материалы и методы исследования

В данной работе показаны материалы для важной отрасли высшей математики, такой как теория обратных задач, где применены методы исследования дифференциальных и интегральных-операторных уравнений, методы вспомогательной функции, методы интегрализации, а также методы регуляризации и элементы математического и функционального анализов. Использованы понятия построения регуляризирующего алгоритма получения достаточного решения и оценки их погрешностей.

Результаты исследования и их обсуждение

Пусть задается обратная задача вида

$$u_{tx^2y} + du_{x^2y} + \lambda(y)[u_y + \Psi(u)u_x] = f(t)(H\theta)(x,y), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0,y,t) = u_x(0,y,t) = 0; u(x,0,t) = 0; u(x,y,0) = \phi(x,y), \forall(x,y,t)\in\Omega, \\ \phi(0,y) = \phi(x,0) = \phi(0,0) = 0, (u(t,0,0) = 0; u(0,0,0) = 0), \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_t + du)\big|_{t=T} = g(x,y), ((x,y,t)\in\bar{\Omega}; \Omega = (0,X)\times(0,b)\times(0,\infty); T\in(0,\infty)), \tag{3}$$

где

$$\begin{cases} H\theta \equiv \int\limits_0^x\int\limits_0^b K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau, \\ C(D_0) \ni K(x,\tau,y,\nu): \left|K(.)\right| \le C_{01}, (D_0 = \{(x,\tau): 0\le\tau\le x\le X\}\times[0,b]\times[0,b], \\ K(.)\ge 0; \int\limits_0^b K(0,0,y,\nu)d\nu \ne 0, \forall y\in[0,b]); C^1(R_+)\ni\Psi(u); \Psi(0)=0; \left|\Psi^{(i)}\right| \le C_1, \\ C^{2,1}(\bar{D}_1)\ni\phi(x,y); C^{0,1}(\bar{D}_1)\ni g(x,y); \left|\phi(.)\right|, \left|\phi_x\right|, \left|\phi_{x^2}\right|, \left|\phi_y\right| \le C_2; \left|g^{(i)}(.)\right| \le C_3, \\ \forall(x,y)\in\bar{D}_1, (i=0,1; D_1 = (0,X)\times(0,b)); C^1[0,b]\ni\lambda(y); \left|\lambda^{(i)}(y)\right| \le C_4, (i=0,1), \\ C(R_+)\ni f(t); f(T)\ne 0; \|f(t)\|_C \left|f^{-1}(T)\right| \le C_5, (0<d; C_i = const, i=\overline{0,5}), \end{cases} \tag{4}$$

$d, \lambda, \Psi, f, \phi, g, K$ – известные функции. Тогда при указанных условиях требуется найти вектор-функцию: $U = (u,\theta)$ с двумя компонентами из $G^2(\Omega)$ с нормой:

$$\begin{cases} \|U\|_{G^2(\Omega)} = \|u\|_{C^{2,1,1}(\bar{\Omega})} + \|\theta\|_{Z^2(D_1)}, \\ U\in G^2(\Omega) = \{U = (u,\theta): u\in C^{2,1,1}(\bar{\Omega}); \theta\in Z^2(D_1), \end{cases}$$

здесь [8]: $Z^2(D_1)$ – пространство, элементами которого являются все суммируемые с квадратом функции из $L^2(\bar{D}_1)$, а также обобщенные функции $z(x,y)$ сосредоточенные в начале координат отрезка $[0, X]$ по переменной x с условием

$$\sup_{y\in[0,b]}\int_0^{\hat{O}} z^2(\tau,y)d\tau < \infty.$$

Чтобы исследовать исходную обратную задачу, сперва эту задачу приводим к интегральному виду. С этой целью введем вспомогательную функцию V по правилу:

$$u_t + du = V(x,y,t), \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}, \tag{5}$$

где V – новая искомая функция с условиями

$$\begin{cases} V(0,y,t) = V_x(0,y,t) = 0; V(x,0,t) = 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,y,t)\Big|_{t=T} = g(x,y), \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда из формулы (5) следует

$$u(x,y,t) = e^{-dt} \cdot \phi(x,y) + \int_0^t e^{-d(t-s)} \cdot V(x,y,s)ds \equiv (AV)(x,y,t). \tag{7}$$

Применяя формулы (5), (7) относительно (1) получим

$$\begin{gathered} V_{x^2 y} + \lambda(y)\{e^{-dt} \cdot \phi_y(x,y) + \int_0^t e^{-d(t-s)} \cdot V_y(x,y,s)ds + \Psi[(AV)(x,y,t)] \times \\ \times [e^{-dt}\phi_x(x,y) + \int_0^t e^{-d(t-s)} \cdot V_x(x,y,s)ds]\} = f(t)H\theta. \end{gathered} \tag{8}$$

Далее, интегрируя (8) по y, имеем

$$\begin{gathered} V_{x^2} + \int_0^y \lambda(\nu)\{e^{-dt} \cdot \phi_\nu(x,\nu) + \int_0^t e^{-d(t-s)} \cdot V_\nu(x,\nu,s)ds + \Psi[(AV)(x,\nu,t)] \times \\ \times [e^{-dt} \cdot \phi_x(x,\nu) + \int_0^t e^{-d(t-s)} \cdot V_x(x,\nu,s)ds]\}d\nu = \int_0^y f(t)(H\theta)(x,\nu)d\nu \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} V_{x^2} + \int_0^y \lambda(\nu)e^{-dt} \cdot \phi_\nu(x,\nu)d\nu + \int_0^t e^{-d(t-s)}[\lambda(y)V(x,y,s) - \int_0^y \lambda'(\nu)V(x,\nu,s)d\nu]ds + \\ + \int_0^y \lambda(\nu)\Psi[(AV)(x,\nu,t)] \times [e^{-dt} \cdot \phi_x(x,\nu) + \int_0^t e^{-d(t-s)} \cdot V_x(x,\nu,s)ds]\}d\nu = \\ = \int_0^y f(t)(H\theta)(x,\nu)d\nu. \end{gathered} \tag{9}$$

Поэтому, допуская

$$V_{x^2} = W(x,y,t), \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}, \tag{10}$$

с условием

$$W(x,y,t)\big|_{t=T} = g(x,y), \forall (x,y,t) \in \bar{\Omega}, \tag{11}$$

получим

$$\begin{cases} V = \int_0^x (x-\tau)W(\tau,y,t)d\tau, \\ V_x = \int_0^x W(\tau,y,t)d\tau. \end{cases} \tag{12}$$

Вследствие этого, так как имеет место (10), (12), из (9) следует интегральное уравнение вида

$$W=-\{\int_0^y \lambda(\nu)e^{-dt}\cdot\phi_\nu(x,\nu)d\nu+\int_0^t e^{-d(t-s)}[\lambda(y)\int_0^x (x-\tau)W(\tau,y,s)d\tau-$$
$$-\int_0^y \lambda'(\nu)\int_0^x (x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau d\nu]ds+\int_0^y \lambda(\nu)\Psi[e^{-dt}\cdot\phi(x,\nu)+ \tag{13}$$
$$+\int_0^t e^{-d(t-s)}\int_0^x(x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau ds]\times[e^{-dt}\phi_x(x,\nu)+\int_0^t e^{-d(t-s)}\int_0^x W(\tau,\nu,s)d\tau ds]d\nu\}+$$
$$+\int_0^y f(t)(H\theta)(x,\nu)d\nu.$$

Из (13) видно, что неизвестными являются (W, θ). Значит, на основе (11) из (13) вытекает

$$\int_0^y (H\theta)(x,\nu)d\nu=(f(T))^{-1}\{g(x,y)+[\int_0^y \lambda(\nu)e^{-dT}\cdot\phi_\nu(x,\nu)d\nu+$$
$$+\int_0^T e^{-d(T-s)}[\lambda(y)\int_0^x (x-\tau)W(\tau,y,s)d\tau-\int_0^y \lambda'(\nu)\int_0^x (x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau d\nu]ds+$$
$$+\int_0^y \lambda(\nu)\Psi[e^{-dT}\cdot\phi(x,\nu)+\int_0^T e^{-d(T-s)}\int_0^x(x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau ds]\times[e^{-dT}\phi_x(x,\nu)+ \tag{14}$$
$$+\int_0^T e^{-d(T-s)}\int_0^x W(\tau,\nu,s)d\tau ds]d\nu]\}\equiv(BW)(x,y,T).$$

Тогда на основе (13) и (14) получим

$$W=-\{\int_0^y \lambda(\nu)e^{-dt}\cdot\phi_\nu(x,\nu)d\nu+\int_0^t e^{-d(t-s)}[\lambda(y)\int_0^x (x-\tau)W(\tau,y,s)d\tau-$$
$$-\int_0^y \lambda'(\nu)\int_0^x (x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau d\nu]ds+\int_0^y \lambda(\nu)\Psi[e^{-dt}\cdot\phi(x,\nu)+ \tag{15}$$
$$+\int_0^t e^{-d(t-s)}\int_0^x(x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau ds]\times[e^{-dt}\phi_x(x,\nu)+\int_0^t e^{-d(t-s)}\int_0^x W(\tau,\nu,s)d\tau ds]d\nu\}+$$
$$+f(t)(BW)(x,y,T)\equiv(PW)(x,y,t),$$

где (13) является интегральным уравнением второго рода по переменным x.

Лемма 1. При наложении исходных условий относительно известных функций d,λ,Ψ,f,ϕ,g и

$$\begin{cases} L_P<1,\\ P:S_r(W_0)\to S_r(W_0),\\ S_r(W_0)=\{W\in C(\bar{\Omega}):\left|W-W_0\right|\le r,\forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}\}, \end{cases} \tag{16}$$

уравнение (15) разрешимо в $C^{0,1,0}\left(\bar{\Omega}\right)$, и решение строится по правилу Пикара:

$$W_{n+1}=PW_n,\ \left(n=0,1,2,\ldots\right) \tag{17}$$

с оценкой погрешности

$$\left\|W_{n+1}-W\right\|_C \le L_P^{n+1} r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{18}$$

где W_0 – начальное приближение, а $0 < L_P$ – коэффициент Липщица оператора P. Тогда с учетом (12) и функция V определяется единственным образом в $C^{2,1,0}(\bar{\Omega})$. Поэтому на основе (7) и существует единственная функция $u \in C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Выше сказано, что (15) является интегральным уравнением второго рода и при условии (16) относительно оператора P реализуются условия Банаха. Поэтому уравнение (15) разрешимо в $C^{0,1,0}(\bar{\Omega})$, причем решение можно найти по правилу (17). Тогда, на основе выводов этого метода, имеем, что последовательность функций $\{W_n\}_0^\infty$ сходится к решению $W(x,y,t)$ уравнения (15) $\forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}$ с оценкой (18), где

$$\begin{cases} L_P = C_4 X d^{-1}[2^{-1}X(1+b)+C_1 b(1+2^{-1}X(C_2+d^{-1}Xr_0)](1+C_5)<1, \\ \|W\|_C \le r_0 = const. \end{cases}$$

С другой стороны, учитывая (10), (12), получим, что функции V, V_x, V_{x^2} ограничены $\forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}$, так как ограничено W, $\forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}$. А это означает, что V определена единственным образом в классе $C^{2,1,0}(\bar{\Omega})$ по правилу

$$\begin{cases} V_n = \int\limits_0^x (x-\tau)W_n(\tau,y,t)d\tau, (n=0,1,2,...), \\ \left\|V-V_n\right\|_C \le \dfrac{X^2}{2} L_P^n r \xrightarrow[n\to\infty, L_P<1]{} 0. \end{cases} \tag{19}$$

Кроме того, так как функция u определяется единственным образом по формуле (7) в $C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$ и все частные производные от функции u ограничены $\forall(x,y,t)\in\bar{\Omega}$ (здесь все частные производные функции u выражаются через функцию V), то имеет место

$$\begin{cases} u_n = e^{-dt}\cdot\phi(x,y)+\int\limits_0^t e^{-d(t-s)}\cdot V_n(x,y,s)ds \equiv (AV_n)(x,y,t), (n=0,1,...), \\ \left\|u-u_n\right\|_C \le \dfrac{X^2}{2d} L_P^n r \xrightarrow[n\to\infty, L_P<1]{} 0. \end{cases} \tag{20}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Как выше отмечено, при выполнении условий леммы 1, с учетом (7) функция u однозначно определяется в $C^{2,1,1}(\bar{\Omega})$. Следовательно, на основе теоремы вложения К. Фридрихса альтернативно можем считать, что функция u единственным образом определяется и в пространстве $W_h^2(\Omega)$, т.е.:

$$u \in W_h^2(\Omega) = \{u : u \in C(\bar{\Omega}); u_x, u_{x^2}, u_y, u_t \in L_h^2(\Omega), (0 \le h(t) \in L^1(0,\infty))\}.$$

При выполнении условий леммы 1 из соотношения (14), с учетом дифферен-цирования по y, имеем интегральное уравнение первого рода:

$$H\theta \equiv \int\limits_0^x\int\limits_0^b K(x,\tau,y,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,y), \tag{21}$$

где

$$\begin{cases} F(x,y) \equiv \dfrac{\partial}{\partial y}(f(T))^{-1}\{g(x,y)+[\int\limits_0^y \lambda(\nu)e^{-dT}\cdot\phi_\nu(x,\nu)d\nu + \\ +\int\limits_0^T e^{-d(T-s)}[\lambda(y)\int\limits_0^x (x-\tau)W(\tau,y,s)d\tau - \int\limits_0^y \lambda'(\nu)\int\limits_0^x (x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau d\nu]ds + \\ +\int\limits_0^y \lambda(\nu)\Psi[e^{-dT}\cdot\phi(x,\nu)+\int\limits_0^T e^{-d(T-s)}\int\limits_0^x(x-\tau)W(\tau,\nu,s)d\tau ds]\times[e^{-dT}\phi_x(x,\nu)+ \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} +\int\limits_0^T e^{-d(T-s)}\int\limits_0^x W(\tau,\nu,s)d\tau ds]d\nu]\}, \\ C(\bar{D}_1) \ni F(x,y); F(0,y)\neq 0, \\ |F(0,y)|\leq C_{02}, \forall y\in[0,b], \\ F(x,y_0)\geq\alpha>0, \forall x\in[0,X], (y_0\in[0,b]). \end{cases}$$

Известно, что при условии (22) интегральное уравнение первого рода (21) некорректно поставленное, т.е. не имеет решения в $C(\bar{D}_1)$. Поэтому, чтобы доказать регуляризируемость (21) в обобщенном смысле, сперва проводим следующие математические преобразования.

Если допускаем

$$(H\theta)(x,y_0)\equiv\int\limits_0^x\int\limits_0^b K(x,\tau,y_0,\nu)\theta^2(\tau,\nu)d\nu d\tau = F(x,y_0) \tag{23}$$

и выполнение условий (4), (22), а также

$$\begin{cases} h(x)\equiv[\gamma+\frac{1}{\alpha}\lambda(x)]F(x,y_0)\geq m>0, (1<\gamma=const), \\ h_0(x)\equiv\gamma+\frac{1}{\alpha}\lambda(x); 0\leq\lambda(x)\in L^1(0,X), \\ h_0(x)\leq C_{03}h(x), (C_{03}=\alpha^{-1}; 0<\max C_{0j}=\tilde{C}_1, j=\overline{1,4}), \\ C_0=\max(1, C_{01}\tilde{C}_1^k), (k=\overline{1,5}), \\ \phi_0(x)=\int\limits_0^x [\gamma+\frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau,y_0)d\tau=\int\limits_0^x h(\tau)d\tau, \\ F_0(x,y)\equiv F(x,y)-F(0,y); |F_0(x,y)|\leq C_{04}, \forall(x,y)\in\bar{D}_1, \\ \textit{например}\ \lambda(x)\equiv\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}: \\ |F_0(x,y)-F_0(\tau,y)|\leq L_{F_0}(x-\tau)\leq L_{F_0}\frac{1}{\gamma\alpha}\int\limits_\tau^x [\gamma+\frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau,y_0)d\tau= \\ =L_{F_0}M_0(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)), (\tau\leq x; \gamma>1; M_0=\frac{1}{\gamma\alpha}), \\ x\in[0,X]:\ x=(\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{2}}(\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{2}}\leq M_1(\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}, \\ x\leq M_1(\sqrt[4]{X})^{\frac{3}{2}}(\phi_0(x))^2\leq M_2(\phi_0(x))^2, \\ M_1=X^{\frac{1}{8}}; M_2=X^{\frac{1}{8}}(\sqrt[4]{X})^{\frac{3}{2}}=X^{\frac{1}{2}}, \\ \chi\equiv\rho^k\exp(-\rho); \sup\limits_{\rho\geq 0}\chi(\rho)=k^k\exp(-k), (k=1,2,\frac{7}{2}), \\ \rho=0: \chi(0)=0; \rho\to\infty: \chi\to 0, \end{cases} \tag{24}$$

то уравнение (21) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^x h(\tau)\theta(\tau,y)d\tau = (Q\theta)(x,y) + F(x,y), \\ Q\theta \equiv \int\limits_0^x h_0(\tau)\theta(\tau,y)(H\theta)(\tau,y_0)d\tau + (H\theta)(x,y). \end{cases} \tag{25}$$

Далее, рассмотрим уравнение с малым параметром ε вида

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x,y) + (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) = F_\varepsilon(x,y), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) \equiv \int\limits_0^x h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau,y)d\tau - (Q\theta_\varepsilon)(x,y), \end{cases} \tag{26}$$

с условием

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon\left(0,y\right) = \dfrac{1}{\varepsilon}F\left(0,y\right), \\ \tilde{N}(\bar{D}_1) \ni F_\varepsilon(x,y) : \left\|F_\varepsilon(x,y) - F(x,y)\right\|_C \le \Delta_0(\varepsilon), \\ F_\varepsilon\left(0,y\right) = F\left(0,y\right). \end{cases} \tag{27}$$

При этом решение интегрального уравнения (26) ищем по правилу

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon\left(x,y\right) = \dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon\left(x,y\right) + \upsilon\left(x,y\right) + \xi_\varepsilon\left(x,y\right), \\ \Pi_\varepsilon\left(0,y\right) = F\left(0,y\right), \upsilon\left(0,y\right) = 0, \xi_\varepsilon\left(0,y\right) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

причем относительно неизвестных функций имеют место

$$\Pi_\varepsilon\left(x,y\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x h(\tau)\Pi_\varepsilon\left(\tau,y\right)d\tau + F(0,y), \tag{29}$$

$$\int\limits_0^x h(\tau)\upsilon\left(\tau,y\right)d\tau = (Q\upsilon)\left(x,y\right) + F_0(x,y), \text{ (см. (24))} \tag{30}$$

$$\varepsilon\xi_\varepsilon + \int\limits_0^x h(\tau)\xi_\varepsilon\left(\tau,y\right)d\tau = (Q[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])\left(x,y\right) - (Q\upsilon)(x,y) + F_\varepsilon(x,y) - \\ -F(x,y) - \varepsilon\upsilon(x,y), \tag{31}$$

где:

а) $\Pi_\varepsilon\left(x,y\right)$ – является решением (29), которое доопределяет особую функцию $\Omega_\varepsilon(x,y)$ с условием

$$\left|\Omega_\varepsilon(x,y)\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} 0, x \ne 0, \\ \infty, x = 0; \end{cases} \tag{*}$$

б) $\upsilon(x,y)$ – решение видоизмененного вырожденного уравнения (30), где свободный член в начале отрезка $[0,X]$ обращается в нуль. При этом функция $\upsilon(x,y) \in C\left(\bar{D}_1\right)$ и доказывается, что система (30) регуляризируема в $C\left(\bar{D}_1\right)$;

в) функция $\xi_\varepsilon(x,y)$ определяется единственным образом из (31), причем сходится к нулю в смысле $C\left(\bar{D}_1\right)$, когда малый параметр: $\varepsilon \to 0$.

1. В самом деле, во-первых, из (29) следует

$$\begin{cases} \Pi_{\varepsilon}(x,y) = F(0,y)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(x)), \\ \left|\Pi_{\varepsilon}(x,y)\right| \le C_{02}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(x)) \le C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(x)). \end{cases} \tag{32}$$

Значит, получим (*).

2. Во-вторых, так как функция $\upsilon(x,y)$ является решением уравнения (30), то, введя уравнение с малым параметром вида

$$\delta\upsilon_{\delta}(x,y) + \int_0^x h(\tau)\upsilon_{\delta}(\tau,y)d\tau = (Q\upsilon_{\delta})(x,y) + F_0(x,y), \tag{33}$$

можем доказать следующую лемму:

Лемма 2. Если выполняются условия леммы 1 и при этом уравнение (30) имеет решение с условиями (22), (24) и (28), то решение уравнения (33) равномерно сходится к решению (30) при $\delta \to 0$.

Доказательство. В условиях леммы 2 уравнение (33) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \upsilon_{\delta}(x,y) = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))\{(Q\upsilon_{\delta})(\tau,y) - (Q\upsilon_{\delta})(x,y) + \\ +F_0(\tau,y) - F_0(x,y)\}d\tau + \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\varphi_0(x))\{(Q\upsilon_{\delta})(x,y) + F_0(x,y)\} \end{aligned} \tag{34}$$

и проводим оценки вида

$$\begin{cases} \text{a}_1)\ \left| \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q\upsilon_{\delta})(x,y) - (Q\upsilon_{\delta})(\tau,y)\}d\tau \right| \le \\ \le \left| \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_{\tau}^x h_0(\tilde{\tau})\left|\upsilon_{\delta}(\tilde{\tau},y)\right| \int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b \right|K(\tilde{\tau},\overline{\tau},y_0,\nu)\left| \times \right. \\ \times\left|\upsilon_{\delta}^2(\overline{\tau},\nu)\right|d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau} + \int_0^{\tau}\int_0^b \left|K(x,\overline{\tau},y,\nu) - K(\tau,\overline{\tau},y,\nu)\right| \times \left|\upsilon_{\delta}^2(\overline{\tau},\nu)\right|d\nu d\overline{\tau} + \\ +\int_{\tau}^x\int_0^b \left|K(x,\overline{\tau},y,\nu)\right| \times \left|\upsilon_{\delta}^2(\overline{\tau},\nu)\right|d\nu d\overline{\tau}\}d\tau \le 2[C_{01}bX\frac{1}{\alpha}r_1^2 + b\frac{1}{\alpha\gamma}r_1 \times \\ \times(L_K X + C_{01})]\int_0^{\infty} e^{-z}zdz\left\|\upsilon_{\delta}\right\|_C = N_0\left\|\upsilon_{\delta}\right\|_C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))(Q\upsilon_{\delta})(x,y) \right| \le \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\left| \{\int_0^x h_0(\tau)\left|\upsilon_{\delta}(\tau,y)\right| \times \right. \\ \times[\int_0^{\tau}\int_0^b \left|K(\tau,\overline{\tau},y_0,\nu)\right| \times \left|\upsilon_{\delta}^2(\overline{\tau},\nu)\right|d\nu d\overline{\tau}]d\tau + \int_0^x\int_0^b \left|K(x,\tau,y,\nu)\right| \times \\ \times\left|\upsilon_{\delta}^2(\tau,\nu)\right|d\nu d\tau\} \le [\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\delta}\phi_0(x)\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x)))XC_{01}br_1^2 + C_{01}br_1 M_1\delta \times \\ \times(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))]\left\|\upsilon_{\delta}\right\|_C \le [\frac{1}{\alpha}e^{-1}XC_0br_1^2 + C_0br_1 M_1\delta 2^2 e^{-2}]\left\|\upsilon_{\delta}\right\|_C \le N_1\left\|\upsilon_{\delta}\right\|_C, \\ 0 < \delta < 1; \rho \equiv \frac{1}{\delta}\phi_0(x); \chi(\rho) = \rho^k\exp(-\rho), (k=1,2), \int_0^{\infty} e^{-s}sds = 1, \\ S_{r_1}(0) = \left\{\upsilon_{\delta}(x,y) \in C(\overline{D}_1) : \left|\upsilon_{\delta}(x,y)\right| \le r_1, \forall(x,y) \in \overline{D}_1\right\}, \end{cases}$$

а также

$$\text{a}_2)\ \Big|\ \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{F_0(x,y)-F_0(\tau,y)\}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))F_0(x,y)\ \Big|\le\Big|\ \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times$$

$$\times L_{F_0}(x-\tau)d\tau+L_{F_0}\frac{x}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\le\frac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\int_0^x \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+L_{F_0}M_2\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\le$$

$$\le L_{F_0}[\frac{1}{\alpha\gamma}\int_0^\infty e^{-z}zdz+2^2e^{-2}M_2\delta]\le L_0.$$

Тогда имеет место

$$\begin{cases}\left\|\upsilon_\delta\left(x,y\right)\right\|_{\tilde{N}}\le(1-q_0)^{-1}L_0=r_1,\\ q_0=N_0+N_1<1.\end{cases}\qquad(35)$$

С другой стороны, с помощью подстановки: $\upsilon_\delta\left(x,y\right)=\upsilon\left(x,y\right)+\mu_\delta\left(x,y\right)$, для любого

$$\mu_\delta\left(x,y\right)\in S_{r_2}(0)=\left\{\mu_\delta\left(x,y\right)\in C\left(\bar{D}_1\right):\left|\mu_\delta\left(x,y\right)\right|\le r_2,\forall(x,y)\in\bar{D}_1\right\},$$

получим

$$\delta\mu_\delta(x,y)+\int_0^x h(\tau)\mu_\delta(\tau,y)d\tau=(Q[\upsilon+\mu_\delta])\left(x,y\right)-(Q\upsilon\ )\left(x,y\right)-\delta\upsilon(x,y),$$

или на основе резольвенты имеем

$$\mu_\delta(x,y)=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])\left(\tau,y\right)-(Q\upsilon\ )\left(\tau,y\right)-$$
$$-(Q[\upsilon+\mu_\delta])\left(x,y\right)+(Q\upsilon\ )\left(x,y\right)\}d\tau+\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\varphi_0(x))\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])\left(x,y\right)-(Q\upsilon\ )\left(x,y\right)\}+\Delta(\delta,\upsilon),\qquad(36)$$

где

$$\begin{cases}\Delta\left(\delta,\upsilon\right)=-\frac{1}{\delta}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))[-\upsilon(\tau,y)+\upsilon(x,y)]d\tau-\upsilon(x,y)\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)),\\ \left\|\Delta\left(\delta,\upsilon\right)\right\|_{\tilde{n}}\le L_\upsilon\{\int_0^x (\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau)))(x-\tau)d(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau)))+x\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)\}\le\\ \le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int_0^x (\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau)))[\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))]\ \delta d(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau)))+\\ +\delta(\frac{1}{\delta}\varphi_0(x))\exp(-\frac{1}{\delta}(\varphi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\delta\{\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\delta,\\ L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le 2L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}=\beta,(0<L_\upsilon=const),\\ \left|\upsilon\left(x,y\right)-\upsilon\left(\bar{x},y\right)\right|\le L_\upsilon\left|x-\bar{x}\right|.\end{cases}\qquad(37)$$

Следовательно, учитывая оценки вида

$$\begin{cases} \mathrm{a}_3)\ \Big| \dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^x h(\tau)\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_\tau^x h_0(\tilde{\tau})[\upsilon(\tilde{\tau},y)+\mu_\delta(\tilde{\tau},y)]\times \\ \times\displaystyle\int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b K(\tilde{\tau},\overline{\tau},y_0,\nu)[2\upsilon(\overline{\tau},\nu)\mu_\delta(\overline{\tau},\nu)+\mu_\delta^2(\overline{\tau},\nu)]d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+ \\ +\displaystyle\int_\tau^x h_0(\tilde{\tau})\mu_\delta(\tilde{\tau},y)\int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b K(\tilde{\tau},\overline{\tau},y_0,\nu)\upsilon^2(\overline{\tau},\nu)d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+\int_0^\tau\int_0^b [K(x,\overline{\tau},y,\nu)- \\ -K(\tau,\overline{\tau},y,\nu)]\times[2\upsilon(\overline{\tau},\nu)\mu_\delta(\overline{\tau},\nu)+\mu_\delta^2(\overline{\tau},\nu)]d\nu d\overline{\tau}+\displaystyle\int_\tau^x\int_0^b K(x,\overline{\tau},y,\nu)\times \\ \times[2\upsilon(\overline{\tau},\nu)\mu_\delta(\overline{\tau},\nu)+\mu_\delta^2(\overline{\tau},\nu)]d\nu d\overline{\tau}\}d\tau\ \Big|\le 2\dfrac{1}{\alpha}\{bXC_{01}(\tilde{r}_1+r_2)(2\tilde{r}_1+r_2)+ \\ +\tilde{r}_1^2 bXC_{01}+b\dfrac{1}{\gamma}(2\tilde{r}_1+r_2)(L_K X+C_{01})\}\|\mu_\delta(x,y)\|_C=\tilde{N}_0\|\mu_\delta(x,y)\|_C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Big| \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)\ \Big|\le\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\times \\ \times[\displaystyle\int_0^x\int_0^b |K(x,\tau,y,\nu)|\times|2\upsilon(\tau,\nu)\mu_\delta(\tau,\nu)+\mu_\delta^2(\tau,\nu)|d\nu d\tau+ \\ +\displaystyle\int_0^x h_0(\tau)|\upsilon(\tau,y)+\mu_\delta(\tau,y)|\int_0^\tau\int_0^b |K(\tau,\overline{\tau},y_0,\nu)|\times|2\upsilon(\overline{\tau},\nu)\mu_\delta(\overline{\tau},\nu)+ \\ +\mu_\delta^2(\overline{\tau},\nu)\ |d\nu d\overline{\tau}d\tau+\displaystyle\int_0^x h_0(\tau)|\ \mu_\delta(\tau,y)|\int_0^\tau\int_0^b |K(\tau,\overline{\tau},y_0,\nu)\ |\times \\ \times|\upsilon^2(\overline{\tau},\nu)|d\nu d\overline{\tau}d\tau]\le[C_{01}bM_2(2\tilde{r}_1+r_2)2^2e^{-2}\delta+C_{01}bX\dfrac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+r_2)\times \\ \times(2\tilde{r}_1+r_2)e^{-1}+C_{01}bX\dfrac{1}{\alpha}\tilde{r}_1^2e^{-1}]\|\mu_\delta(x,y)\|_C\le\tilde{N}_1\|\mu_\delta(x,y)\|_C,(0<\delta<1),\ |\upsilon|\le\tilde{r}_1,\forall(x,y)\in\overline{D}_1, \end{cases}$$

из (36) имеем

$$\begin{cases} \|\mu_\delta(x,y)\|_c\le(1-q_1)^{-1}\beta\delta, \\ q_1=\max(q_0<1,\tilde{q}_0<1),(\tilde{q}_0=\tilde{N}_0+\tilde{N}_1<1). \end{cases} \qquad (38)$$

А это означает, что

$$\upsilon_\delta(x,y)\underset{\delta\to0}{\to}\upsilon(x,y),\forall(x,y)\in\overline{D}_1, \qquad (39)$$

т.е. сходится в смысле $C(\overline{D}_1)$. Что и требовалось доказать.

3. Чтобы определить функцию $\xi_\varepsilon(x,y)$, сперва (31) преобразуем к виду

$$\xi_\varepsilon(x,y)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(\tau,y)-$$
$$-(Q\upsilon)(\tau,y)-(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)+(Q\upsilon)(x,y)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(x))\times \qquad (40)$$
$$\times\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)\}+\Delta(\varepsilon,\upsilon)+\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F),$$

где

$$\begin{cases} \Delta(\varepsilon,\upsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))[-\upsilon(\tau,y)+\upsilon(x,y)]d\tau-\upsilon(x,y)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)), \\ \Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))\{F_\varepsilon(\tau,y)-F(\tau,y)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}[F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)], \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \|\Delta(\varepsilon,\upsilon)\|_{\tilde{n}}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int\limits_0^x (\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau)))[\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau))]\ \varepsilon d(-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)-\varphi_0(\tau)))+ \\ +\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(x))\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\varepsilon\{\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\varepsilon.\ \text{(см (37)).} \end{cases}$$

Далее, для оценки (40) учитываем

$$\begin{cases} \text{a}_4)\ |\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)|\le\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))|F_\varepsilon(\tau,y)-F(\tau,y)|d\tau+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}|F_\varepsilon(x,y)-F(x,y)|\le\frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon),(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0); \\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int\limits_\tau^x h_0(\tilde{\tau})|\ \upsilon(\tilde{\tau},y)+\xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\ |\times\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b|K(\tilde{\tau},\overline{\tau},y_0,\nu)|[2|\upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)+ \\ +2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\ |(|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |)]d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+ \\ +\int\limits_\tau^x h_0(\tilde{\tau})|\ \xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\ |\int\limits_0^{\tilde{\tau}}\int\limits_0^b|K(\tilde{\tau},\overline{\tau},y_0,\nu)|\upsilon^2(\overline{\tau},\nu)d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+ \\ +\int\limits_0^\tau\int\limits_0^b|K(x,\overline{\tau},y,\nu)-K(\tau,\overline{\tau},y,\nu)|[2|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)+ \\ +2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\ |(|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |)]d\nu d\overline{\tau}+\int\limits_\tau^x\int\limits_0^b|K(x,\overline{\tau},y,\nu)\ |\times \\ \times[2|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\ |(|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+ \\ +|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\overline{\tau},y)]d\nu d\overline{\tau}\}d\tau\ \ |\le\frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)[bXC_{01}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)+ \\ +2bC_{01}C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]\|\xi_\varepsilon\|_C+\frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\|\xi_\varepsilon\|_C)[2\tilde{r}_1bC_{01}C_0\times \\ \times\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+bC_{01}C_0^2\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+\frac{1}{\alpha}bC_{01}C_0^2\times \\ \times[2\tilde{r}_1\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+\frac{1}{\alpha}bC_{01}C_0[2C_0\times \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\times\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]\|\xi_\varepsilon\|_C+ \\
+\frac{1}{\alpha}bC_{01}\tilde{r}_1^2[X\|\xi_\varepsilon\|_C+C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]+L_K\frac{1}{\gamma\alpha}b\{[X(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)+ \\
+2C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]\|\xi_\varepsilon\|_C+2\tilde{r}_1C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+C_0^2\times \\
\times\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}\}+bC_{01}\{\frac{1}{\gamma\alpha}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\|\xi_\varepsilon\|_C+2C_0\tilde{r}_1\times \\
\times\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}+2C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}\|\xi_\varepsilon\|_C+ \\
+C_0^2\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}\}\le T_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde{q}_1\|\xi_\varepsilon\|_C, \\
|\xi_\varepsilon(x,y)|\le\tilde{r}_2,\forall(x,y)\in\overline{D}_1,
\end{cases}
$$

и

$$
\begin{cases}
\text{a}_5)\ \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))|(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x,y)-(Q\upsilon)(x,y)|\le \\
\le\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\{\int_0^x h(\tilde{\tau})|\ \upsilon(\tilde{\tau},y)+\xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\ |\times \\
\times\int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b |K(\tilde{\tau},\overline{\tau},y_0,\nu)|[2|\upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)+ \\
+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\ |(|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)]d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+ \\
+\int_0^x h_0(\tilde{\tau})|\ \xi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau},y)\ |\int_0^{\tilde{\tau}}\int_0^b |K(\tilde{\tau},\overline{\tau},y_0,\nu)|\upsilon^2(\overline{\tau},\nu)d\nu d\overline{\tau}d\tilde{\tau}+ \\
+\int_0^x\int_0^b |K(x,\overline{\tau},y,\nu)\ |[2|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+\xi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)+ \\
+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\overline{\tau},y)\ |(|\ \upsilon(\overline{\tau},\nu)\ |+|\ \xi_\varepsilon(\overline{\tau},\nu)\ |)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\overline{\tau},\nu)]d\nu d\overline{\tau}\}\le \\
\le\frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)[bXC_{01}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)+2bC_{01}C_0\int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\overline{\tau}))d\overline{\tau}]\|\xi_\varepsilon\|_C+
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} +\frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\|\xi_\varepsilon\|_C)[2\tilde{r}_1 bC_{01}C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau+bC_{01}C_0^2\times \\ \times\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau]+\frac{1}{\alpha}bC_{01}C_0^2[2\tilde{r}_1\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau+ \\ +C_6\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau]+\frac{1}{\alpha}bC_{01}C_0[2C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau+ \\ +(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau]\|\xi_\varepsilon\|_C+\frac{1}{\alpha}bC_{01}\tilde{r}_1^2[X\|\xi_\varepsilon\|_C+ \\ +C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau]+[bC_{01}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)M_1\varepsilon^{\frac{5}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\times \\ \times\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))+2C_{01}bC_0M_1\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))]\|\xi_\varepsilon\|_C+ \\ +C_{01}bC_0^2M_1\sqrt{\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\le\tilde{T}_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde{q}_2\|\xi_\varepsilon\|_C, \end{cases}$$

здесь учтены

$$\begin{cases} \int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau=\frac{1}{\varepsilon^3}\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))\Big|_0^x+\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\tau\times \\ \times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\le\frac{1}{\varepsilon^3}x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x))+M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}\times \\ \times\int\limits_0^x(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d\tau\le M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\times \\ \times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x))+\int\limits_0^{\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)}\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]\le M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\int\limits_0^\infty\rho^{\frac{7}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]= \\ =M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105}{8}\int\limits_0^\infty\rho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\rho}\,d\rho]=\sqrt{\varepsilon}M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}]= \\ =T_1\sqrt{\varepsilon}, \\ \textit{аналогично}: \\ \int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau\le M_1\varepsilon^{\frac{5}{2}}\left[\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}}+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}\right]=T_2\varepsilon^{\frac{5}{2}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau\le T_2\varepsilon^{\frac{3}{2}}, \\ \int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\tau))d\tau\le T_1\varepsilon^{\frac{3}{2}},(0<T_i=const,i=1,2;0<\varepsilon<1). \end{cases}$$

Поэтому из оценки (40) следует

$$\begin{cases} \left\|\xi_\varepsilon(x,y)\right\|_c \le (1-q)^{-1}[\beta\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) + T_0\sqrt{\varepsilon}] = \Delta_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ q = \max(q_1 < 1, \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 < 1), \\ T_0 = T_3 + \tilde{T}_3. \end{cases} \quad (42)$$

Лемма 3. При условиях леммы 1 и (24), (27), (32), (41), (42) уравнение (31) разрешимо в $C(\bar{D}_1)$, причем при *ε→0* сходится к нулю в смысле $C(\bar{D}_1)$.

Заключение

А) Если выполняются условия лемм 1–3, то решение уравнения (26) единственным образом представимо в виде (28), при этом*** $\forall y \in (0,T]$ решение уравнения (26) сходится (неравномерная сходимость) при *ε→0* к решению уравнения (30) с оценкой:

$$\begin{cases} \left|\theta_\varepsilon - \upsilon\right| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\left|\Pi_\varepsilon(x,y)\right| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(x)), \\ \left|\Pi_\varepsilon(x,y)\right| \le C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(x)). \end{cases} \quad (43)$$

Б) А в случае: $x = 0 : \theta_\varepsilon(0,y) = \frac{1}{\varepsilon}F(0,y).$

Кроме того, имеет место (*). Поэтому, учитывая вышеуказанные дефекты, пока не можем сказать о близости решений уравнений (26) и (30) в определенном смысле.

Чтобы полноценно оценить близости решений уравнений (26), (30) в этом пространстве, докажем теорему.

Теорема 1. Пусть имеют место условия лемм 1–3 и имеет место (43). Тогда следуют

1) $$\left\|\Pi_\varepsilon\right\|_{Z^2(D_1)} \le \gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_0\sqrt{M_1 b}e^{-\frac{7}{4}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \quad (44)$$

2) $$\|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^2(D_1)} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \quad (45)$$

3) $$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)\right\|_{Z^2(D_1)} \le \tilde{M}(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \text{ при } \varepsilon 0\to 0).$$

Доказательство. Рассматривая второе соотношение формулы (43) в смысле нормы пространства $Z^2(D_1)$, получим

$$\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2} \le C_0(\sup_{[0,X]}\int_0^{\tilde{o}}\int_0^{\acute{o}} \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(\tau))d\tau d\nu)^{\frac{1}{2}} = C_0\sqrt{b}\sup_{[0,X]}[\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(\tau))\Big|_0^x +$$

$$+\int_0^x \tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(\tau))]^{\frac{1}{2}} = C_0\sqrt{b}\sup_{[0,X]}[x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(x)) + \int_0^x M_1 2^{-\frac{7}{2}}\varepsilon^{\frac{7}{2}}(\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(\tau))^{\frac{7}{2}} \times$$

$$\times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(\tau))]^{\frac{1}{2}} \le C_0\sqrt{bM_1}2^{-\frac{7}{4}}\varepsilon^{\frac{7}{4}}\sup_{[0,X]}[(\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0(x)) + \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{\frac{7}{2}}d\rho]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_0\sqrt{bM_1}2^{-\frac{7}{4}}\varepsilon^{\frac{7}{4}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1\varepsilon^{\frac{7}{4}},$$

т.е. действительно имеет место (44).

Кроме того, из первого соотношения формулы (43) на основе нормы $Z^2(D_1)$ и неравенства $(a_1+a_2)^n \le 2^n(a_1^n+a_2^n), \quad a_1 \ge 0, a_2 \ge 0$ следует

$$\|\theta_\varepsilon - \upsilon\|_{Z^2} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \gamma_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon).$$

А это означает, что и выполняется неравенство (45).

С другой стороны, с учетом (см. (26))

$$\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)\right| = \left|\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F_\varepsilon(x,y) - \varepsilon(\theta_\varepsilon - \upsilon + \upsilon) + F_\varepsilon(x,y) - F(x,y)\right|,$$

получим

$$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x,y) - F(x,y)\right\|_{Z^2(D_1)} \le 4[\left\|F_\varepsilon(x,y) - F(x,y)\right\|_{Z^2(D_1)} + \varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(x,y) - \upsilon(x,y)\right\|_{Z^2(D_1)} +$$

$$+\varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{Xb}] \le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{Xb} + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{Xb}] = \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. В условиях леммы 1 и теоремы 2 задача (1)–(3) регуляризируема в $G^2(\Omega)$ в обобщенном смысле.

Заключение

В данной работе рассмотрена многомерная коэффициентная обратная задача с оператором гиперболического типа, вырождающаяся в двумерное интегральное уравнение первого рода с особым решением в $G^2(\Omega)$. Данная задача исследована с помощью метода вспомогательной функции и метода регуляризации, которые позволили выявить достаточные условия разрешимости этих задач и регуляризируемости в $G^2(\Omega)$ в обобщенном смысле. Результаты работы могут быть использованы и в других задачах математической физики, где вырождаются нелинейные некорректные интегральные уравнения первого рода.

Список литературы

1. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 689–699.

2. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. Бишкек: Илим, 2003. 162 с.

3. Омуров Т.Д., Джумагулов К.Р., Омуров М.Т. Регуляризация обратных задач, где вырождается уравнение Вольтерра первого рода с особым решением // Естественные и математические науки в современном мире: сборник статей по материалам XLII международной научно-практической конференции № 5 (40). Новосибирск: СибАК, 2016. С. 98–110.

4. Омуров Т.Д., Алыбаев А.М., Джумагулов К.Р. Обратно-нелокальная задача в неограниченной области, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода // Наука, техника и образование. 2017. № 1 (31). С. 10–15.

5. Джумагулов К.Р. Решение обратной задачи с гиперболическим оператором, где вырождается неклассическое уравнение Вольтерра третьего рода // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. 2018. № 4 (96). С. 17–23.

6. Джумагулов К.Р. Регуляризация обратно-нелокальной задачи с гиперболическим оператором, где вырождается уравнение Вольтерра третьего рода // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2020. Т. 20. № 8. С. 3–10.

7. Чекиров К., Джумагулов К.Р. Получение приближенных оптимальных решений задач, описываемых линейными операторными уравнениями // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2019. № 6. С. 164–167.

8. Omurov T.D. and Alybaev A.M. Regularization of a system of the first kind Volterra incorrect two-dimensional equations. Advances in Differential Equations and Control Processes. 2022. V. 27. P. 149–162. DOI: 10.17654/0974324322018.