СТАТЬЯ

УДК 532.3:532.5:517.928.7

ДВИЖЕНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НЕМОНОПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Сенницкий В.Л.

ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;
ФГАОУ ВО «Новосибирский государственный университет», Новосибирск,
e-mail: sennitskii@yandex.ru

Выполненные ранее исследования динамики гидромеханических систем при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях позволили получить ряд новых нетривиальных результатов. В частности, теоретически и экспериментально установлено существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в колеблющейся жидкости (В.Л. Сенницкий, 1988, 1991, 1993, 2001). Найдено, что вибрационные воздействия могут приводить к гидромеханическому эффекту – аналогу «маятника Капицы» (П.Л. Капица, 1951), состоящему в том, что в присутствии поля силы тяжести находящееся в жидкости твердое тело совершает «перевернутые» колебания (В.Л. Сенницкий, 2009). Обнаружен эффект «левитации» жидкости (В.Л. Сенницкий, 2021, 2022). В рассматривавшихся до настоящего времени задачах все составляющие периодических воздействий на гидромеханическую систему имели один и тот же период, воздействия были монопериодическими. В данной работе поставлена и решена задача, в которой воздействия на систему характеризуются наличием более одного периода, воздействия являются немонопериодическими. В идеальной несжимаемой не ограниченной извне жидкости находится твердое включение (шар). Скорость жидкости на бесконечности и радиус включения периодически (с одним и тем же периодом или с различными периодами) изменяются со временем. Гидромеханическая система совершает движение, подлежащее определению. Принципиально важным является то, что оказываемые на систему воздействия, происходящие в системе заданные периодические изменения (колебания скорости жидкости вдали от включения, пульсации включения) не имеют выделенного направления в пространстве. Установлено, в частности, что при монопериодических воздействиях включение (центр включения) на фоне колебаний совершает однонаправленное движение; при немонопериодических воздействиях с близкими периодами включение (центр включения) на фоне «быстрых» колебаний совершает «медленные» колебания вдоль прямой линии с периодом, обратно пропорциональным разности периодов колебаний скорости жидкости на бесконечности и радиуса включения.

Ключевые слова: жидкость, включение, отсутствие выделенного направления в пространстве, монопериодические и немонопериодические воздействия, однонаправленное движение, медленные колебания

MOTION OF A HYDROMECHANICAL SYSTEM UNDER NON-MONO-PERIODIC INFLUENCES

Sennitskiy V.L.

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk;
Novosibursk State University, Novosibirsk, e-mail: sennitskii@yandex.ru

The fulfilled earlier investigations of the dynamics of hydro-mechanical systems under periodic in time (oscillatory, vibratory) influences allowed to obtain a series of new, non-trivial results. In particular it was revealed theoretically and experimentally the existence of the phenomenon of the predominantly unidirectional motion of compressible inclusions in an oscillating liquid (V.L. Sennitskiy, 1988, 1991, 1993, 2001). It was found out that oscillatory influences were able to generate the hydro-mechanical effect – an analog of "the pendulum of Kapitsa"(P.L. Kapitsa, 1951), which consists in that under the presence of a gravity field a solid body being in a liquid performs"turned upside-down"oscillations (V.L. Sennitskiy, 2009). The effect of "levitation"of a liquid was discovered (V.L. Sennitskiy, 2021, 2022). In the problems which were under consideration before the present time all components of periodic influences to a hydro-mechanical system had a same period, the influences were mono-periodic. The problem is formulated and solved in this work in which the influences to the system are characterized by the presence of more than one period, the influences are non-mono-periodic. There is a solid inclusion (a ball) in an ideal incompressible unbounded from outside liquid. The liquid velocity at infinity and the radius of the inclusion change in time periodically (with a same period or with different periods). The hydro-mechanical system fulfils a motion which has to be determined. It is of principle importance that the influences to the system, the prescribed periodic changes in the system (the oscillations of the liquid velocity far from the inclusion, the pulsations of the inclusion) have no predominant direction in space. It is found out in particular that for mono-periodic influences the inclusion (the inclusion center) under a background of oscillations fulfils a unidirectional motion; for non-mono-periodic influences with close periods the inclusion (the inclusion center) under a background of "fast" oscillations fulfils "slow" oscillations along a straight line with the period which is inversely proportional to the difference of the periods of the oscillations of the liquid velocity at infinity and the inclusion radius.

Keywords: liquid, inclusion, absence of a predominant direction in space, mono-periodic and non-mono-periodic influences, unidirectional motion, slow oscillations

Состояние современной гидромеханики в значительной мере характеризуется работами, нашедшими отражение в изданиях [1–3]. Часть данной научной области составлена исследованиями динамики гидромеханических систем при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве [4, 5]. В настоящей работе рассматривается новая задача о движении гидромеханической системы при воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве. Система состоит из идеальной несжимаемой не ограниченной извне жидкости и находящегося в ней твердого тела Ξ (включения, шара) радиуса A. В начальный момент времени t, при t = 0 жидкость и тело Ξ покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. В последующие моменты времени при t > 0 на гидромеханическую систему оказываются воздействия, наличие которых проявляется в том, что скорость жидкости на бесконечности $\mathbf{V}_\infty = \{V_\infty, 0, 0\}$ и радиус включения периодически соответственно с периодами T и τ изменяются со временем. Центр инерции включения совпадает с центром включения. Течение жидкости является потенциальным [6]. Периоды T, τ могут совпадать друг с другом или быть различными.

Целью работы является определение движения гидромеханической системы (жидкости и включения).

Постановка и решение задачи

Пусть **S** – радиус-вектор центра тела Ξ (центра инерции тела Ξ); Φ – потенциал скорости жидкости; m – масса тела Ξ; ρ – плотность жидкости; Γ – граница тела Ξ (сфера радиуса A с центром в центре тела Ξ); **n** – единичный вектор внешней нормали к Γ; P – давление в жидкости; I – функция t;

$$\mathbf{F} = \{F_X,\ F_Y,\ F_Z\} = -\iint_\Gamma P\,\mathbf{n}\,d\Gamma,$$

– сила, действующая со стороны жидкости на тело Ξ.

Уравнение движения тела Ξ (центра инерции тела Ξ), уравнение неразрывности, интеграл Коши–Лагранжа, граничные и начальные условия имеют следующий вид:

$$m\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} = \mathbf{F}\,; \tag{1}$$

$$\Delta\Phi = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{P}{\rho} = I; \tag{3}$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi = \mathbf{n}\cdot\frac{d\mathbf{S}}{dt} + \frac{dA}{dt}\ \text{ на } \Gamma; \tag{4}$$

$$\nabla\Phi \to \mathbf{V}_\infty \text{ при } X^2 + Y^2 + Z^2 \to \infty \tag{5}$$

$$\Phi = 0,\ \mathbf{S} = 0,\ d\mathbf{S}/dt = 0 \text{ при } t = 0 \tag{6}$$

(функции $A = A(t)$, $V_\infty = V_\infty(t)$ являются заданными; $A = \hat{A}$, $dA/dt = 0$, $V_\infty = 0$ при $t = 0$ ($\hat{A} > 0$ – постоянная)).

Предположим, что

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_x \text{ для } t > 0 \tag{7}$$

то есть при всех t > 0 центр тела Ξ находится на оси X (S = 0, dS / dt = 0 при t = 0). Отметим, что для выполнения (7) необходимо и достаточно, чтобы были удовлетворены условия

$$F_Y = 0,\ F_Z = 0 \text{ для } t > 0. \tag{8}$$

Зафиксируем (произвольный) момент времени t > 0. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат X_1, X_2, X_3, неподвижную относительно системы X, Y, Z, такую что начало координат X_1, X_2, X_3 совпадает с центром тела Ξ, ось X_1 лежит на оси X, и направления осей X_2, X_3 совпадают соответственно с направлениями осей Y, Z. Будем использовать сферические координаты R, θ, φ, связанные с координатами X_1, X_2, X_3 соотношениями

$$X_1 = R\cos\theta,\quad X_2 = R\sin\theta\cos\varphi,$$

$$X_3 = R\sin\theta\sin\varphi.$$

Преобразуем задачу (2), (4), (5) к виду

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{dS}{dt}\cos\theta + \frac{dA}{dt} \quad \text{при } R = A; \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} \to V_\infty\cos\theta,\quad \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \to -V_\infty\sin\theta,\qquad \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty. \tag{11}$$

Задача (9)–(11) имеет решение

$$\Phi = \left[V_\infty + \frac{1}{2}\left(V_\infty - \frac{dS}{dt} \right) \frac{A^3}{R^3} \right] R\cos\theta \ - \ \frac{dA^3 \diagup dt}{3R}. \tag{12}$$

Отметим, что согласно (3), (12)

$$F_Y = -A^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_{|_{R=A}} \ (\sin\theta)^2 \quad \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta = 0,$$

$$F_Z = -A^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_{|_{R=A}} \ (\sin\theta)^2 \quad \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 0,$$

то есть условия (8) являются выполненными.

Используя (1), (3), (6), (12), получим

$$F_X = -2\pi A^2 \int_0^\pi P_{|_{R=A}} \ \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3}\left\{ A^3 \frac{dV_\infty}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[A^3 \left(V_\infty - \frac{dS}{dt} \right) \right] \right\};$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(m + \frac{2\pi}{3} A^3 \rho \right) \frac{dS}{dt} \right] = 2\pi\rho A^2 \frac{d(AV_\infty)}{dt}; \tag{13}$$

$$S = \frac{2\pi}{3}\rho \int_0^t \left(3A^3 V_\infty - 2\int_0^{t'} \frac{dA^3}{dt''} V_\infty dt'' \right) \frac{dt'}{m + \frac{2\pi}{3} A^3 \rho}.$$

Формулами (3), (12), (13) определяется точное решение задачи (1)–(6).

Пусть

$$A = \hat{A}\left[1 + \varepsilon\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{\tau} \right) \right], \quad V_\infty = \hat{V} \sin\frac{2\pi t}{T} \tag{14}$$

($\varepsilon \geq 0$ – параметр; $\hat{V}$ – постоянная).

Отметим, что согласно (14)

$$\frac{dA^3}{dt} V_\infty = 3\pi\varepsilon \frac{\hat{A}^3 \hat{V}}{\tau} \left\{ \left(1 + 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \right) \left[\cos\frac{2\pi(T-\tau)t}{T\tau} - \cos\frac{2\pi(T+\tau)t}{T\tau} \right] - \right.$$

$$- \varepsilon(1+\varepsilon)\left[\cos\frac{2\pi(2T-\tau)t}{T\tau} - \cos\frac{2\pi(2T+\tau)t}{T\tau} \right] - \tag{14}$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\cos\frac{2\pi(T-\tau)t}{T\tau} - \cos\frac{2\pi(3T-\tau)t}{T\tau} - \cos\frac{2\pi(T+\tau)t}{T\tau} - \cos\frac{2\pi(3T+\tau)t}{T\tau} \right] \right\}.$$

Остановимся на вопросе о движении тела Ξ (центра тела Ξ) при малых по сравнению с единицей значениях ε.

Пусть

$$\tau = T. \tag{15}$$

Используя (12)–(15), получим

$$\frac{dS}{dt} \sim U_1 = \frac{3}{\lambda+1}\hat{V}\left\{ \sin\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{3\lambda}{\lambda+1}\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\lambda-1}{2(\lambda+1)} \sin\frac{4\pi t}{T} \right] \right\}, \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{16}$$

где

$$\lambda = \frac{m}{(2\pi/3)\hat{A}^3\rho}.$$

Согласно (16) тело Ξ на фоне колебаний совершает однонаправленное движение со скоростью

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = -\frac{6\pi\varepsilon}{\lambda+1}\hat{V}\frac{t}{T}\mathbf{e}_X. \quad (17)$$

Пусть

$$\tau \neq T. \quad (18)$$

Подчиним периоды τ, T условию

$$\frac{|\tau - T|}{T} < 1-\alpha, \quad (19)$$

где $0<\alpha<1$ – постоянная.

Используя (13), (14), (18), (19), получим

$$\frac{dS}{dt} \sim U_2 = \frac{3}{\lambda+1}\hat{V}\left\{\sin\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\left[\frac{T}{\tau-T}\sin\frac{2\pi(\tau-T)t}{\tau T} - \frac{T}{\tau+T}\sin\frac{2\pi(\tau+T)t}{\tau T} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{3\lambda}{2(\lambda+1)}\left(2\sin\frac{2\pi t}{T} - \sin\frac{2\pi(\tau-T)t}{\tau T} - \sin\frac{2\pi(\tau+T)t}{\tau T}\right)\right]\right\}. \quad (20)$$

Согласно (20) тело Ξ совершает колебания. В частности, при периодах τ, T, близких друг к другу, тело Ξ на фоне «быстрых» колебаний совершает «медленные» колебания со скоростью

$$\bar{\mathbf{U}}_2 = -\frac{3\varepsilon}{\lambda+1}\hat{V}\frac{T}{\tau-T}\sin\frac{2\pi(\tau-T)t}{\tau T}\mathbf{e}_X. \quad (21)$$

Амплитуда «медленных» колебаний тела Ξ (центра тела Ξ) составляет

$$\frac{3\varepsilon}{2\pi(\lambda+1)}\left|\hat{V}\right|\frac{\tau T^2}{(\tau-T)^2}. \quad (22)$$

Отметим, что согласно (16), (20) предел U_2 при стремлении к нулю τ – T равен U_1.

Заключение

Проведенное рассмотрение позволило обнаружить, что монопериодические и немонопериодические воздействия на гидромеханическую систему, не имеющие выделенного направления в пространстве, могут приводить к качественно различной динамике системы ((16), (17), (20)–(22)). В частности, в настоящей работе найдено, что при монопериодических воздействиях включение в жидкости на фоне колебаний совершает однонаправленное движение; при немонопериодических воздействиях с близкими периодами включение в жидкости на фоне «быстрых» колебаний совершает «медленные» колебания вдоль прямой линии с периодом, обратно пропорциональным разности периодов, и амплитудой, обратно пропорциональной квадрату разности периодов происходящих в гидромеханической системе заданных периодических изменений – колебаний скорости жидкости на бесконечности и радиуса включения.

Список литературы

1. Международная конференция «Математика в приложениях». Тезисы докладов (Новосибирск, 4–10 августа 2019 г.). Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2019. 312 с.

2. Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 7–11 сентября 2020 г.). Тезисы докладов. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2020. 262 с.

3. Евразийская конференция по прикладной математике: сборник тезисов (Новосибирск, 16–22 декабря 2021 г.). Новосибирск: Математический центр в Академгородке, 2021. 88 с.

4. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. № 2. С. 126–133. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.210.

5. Сенницкий В.Л. Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19. № 1. С. 241–247. DOI: 10.33048/semi.2022.19.018 .

6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.