СТАТЬИ

УДК 517.968

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

[1]Зулпукаров Ж.А., [2]Алиева Ж.А.

[1]Ошский технологический университет Кыргызстан, Ош, e-mail: zulpukarov66@mail.ru;

[2]Ошский государственный педагогический университет Кыргызстан, Ош, e-mail: Zharkynay_71@mail.ru

Важность данной темы связана с изучением решений некорректных задач, так как многие физические процессы среды описываются такими дифференциальными уравнениями. Обратные задачи имеют большое практическое значение в таких областях науки, как: проблемы интерпретации физическими приборами автоматического управления, обратные задачи гравиметрии, кинематики и сейсмики. В данной работе исследуется некорректная задача в виде интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Интегральные уравнения Вольтерра широко применяются в задачах астрономии, биологии, экологии, электродинамики и механики. В настоящее время возникают все новые области, в которых основные процессы модулируются интегральными уравнениями первого, второго и третьего рода. В данной работе рассмотрено построение алгоритма регуляризации посредством применения методов последовательного приближения и малого параметра. При этом на первый план выдвигаются вопросы единственности решения, а также построения регуляризирующих семейств операторов и оценки их эффективности. Результаты данной работы могут быть использованы для доказательства регуляризируемости в обобщенном смысле для прикладных задач.Таким образом, в данной статье описываются расширенное решение построения регуляризации интегрального уравнения, нахождение достаточного решения путем применения принципа сжимающих отображений и вспомогательной функции.

Ключевые слова: функция, неравенства, ядро, пространство, уравнения, малый параметр, следствие

CONSTRUCTION OF A REGULARIZATION OF THE SOLUTION FOR AN EQUATION VOLTERRA OF THE FIRST KIND

[1]Zulpukarov Zh.A., [2]Alieva Zh.A.

[1]Osh Technological University Kyrgyzstan, Osh, e-mail: zulpukarov66@mail.ru;

[2]Osh Stfte Pedagogical University Kyrgyzstan, Osh, e-mail: Zharkynay_71@mail.ru

The importance of this topic is related to the study of solutions to ill-posed problems, since many physical processes of the medium are described by such differential equations. Inverse problems are of great practical importance in such areas of science as: problems of interpretation by physical automatic control devices, inverse problems of gravimetry, kinematics and The paper investigates an ill-posed problem in the form of a Volterra integral equation of the first kind with two independent variables. Volterra integral equations are widely used in problems of astronomy, biology, ecology, electrodynamics and mechanics. At present, more and more new areas are emerging in which the main processes are modulated by integral equations of the first, second and third kind. The construction of a regularization algorithm using the methods of successive approximation and a small parameter takes place in this work. At the same time, the issues of the uniqueness of the solution, as well as the construction of regularizing families of operators and estimating their efficiency, come to the fore. The results of this work can be applied and used to prove regularizability in a generalized sense for applied problems. Thus, in this article there is an extended solution for constructing a regularization of an integral equation, finding a sufficient solution by applying the principle of contraction mappings and an auxiliary function.

Keywords: function, inequalities, kernel, space, equations, small parameter, consequence

Интегральные уравнения относятся к разделу математики и являются важными для приложений – к ним приводятся прикладные задачи разных разделов физики, техники и других многих наук. Поэтому в настоящее время теория интегральных уравнений интенсивно развивается благодаря исследователям. С развитием современных компьютерных технологий можно строить математические модели прикладных задач и решать их методами численных решений. Многие такие задачи сводятся к интегральным уравнениям. Для доказательства существования решения линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода с одной переменной и достаточными условиями для их получения А.М. Денисов, В.О. Сергеев и другие авторы использовали метод дифференцирования по заданным функциям [1, 2, 3]. В своих работах М.М. Лаврентьев, М.И. Иманалиев и А. Асанов изучали решение линейных интегральных уравнений первого рода [4, 5] в пространстве функций C(G) и обобщенных интегральных уравнений Вольтерра первого типа с негладким ядром. Первые результаты по построению регуляризации для решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с одним независимым переменным были получены в [1].

Однако интегральные уравнения с двумя независимыми переменными мало изучены. Это объясняется трудностями в построении резольвенты, так как еще не получено аналитическое представление в общем виде, за исключением некоторых случаев. Поэтому исследования решений таких уравнений являются актуальными.

В связи с этим данная статья посвящена изучению регуляризации для решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Основной целью данной работы является построение алгоритма регуляризации для решения интегрального уравнения [6, 7].

Материалы и методы исследования

В данном исследовании показаны материалы для важных разделов высшей математики, такие как теория обратных задач, где используются методы интегральных уравнений, функционального анализа, метод последовательных приближений и малого параметра, а также методы регуляризации и элементы математического и функционального анализов.

Результаты исследования и их обсуждение

Пусть задано уравнение вида

$$\int_0^t K(t,x,s)u(s,x)\,ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z)\,dzds = f(t,x),\ (t,x)\in G \qquad (1)$$

где $u(t,x)$ – неизвестная функция, $K(t,x,s)$ и $N(t,x,s,z)$ – ядра, $f(t,x)$ – известная функция,

$$f(t,x) = 0 \text{ при } x\in[0;X],\ G = \{(t,x)\colon 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le X\}.$$

На основании выполнения условий:

а) $K(t,x,s)\in G_1=\{(t,x,s)\colon 0\le s\le t\le T, 0\le x\le X\}$, $N(t,x,s,z)\in G_2=\{(t,x,s,z)\colon 0\le s\le t\le T, 0\le z\le x\le X\}$ – непрерывные функции, $K(t,x,t) \ge K_0(t) > 0$ при $(t,x)\in G$, $\left|K(t,x,t)\right| \le N_0K_0(t)$, $K_0(t)\in L_1(0,T)$;

б) при $t>\tau$ и для любых $(t,x,s),(\tau,x,s)\in G_1$ справедливо неравенство:

$$\left|K(t,x,s)-K(\tau,x,s)\right| \le C\int_\tau^t K_0(s)\,ds,$$

где $0<C$ – const;

в) при $t>\tau$ для любых $(t,x,s,z),(\tau,x,s,z)\in G_2$ справедливо неравенство:

$$\left|N(t,x,s,z)-N(\tau,x,s,z)\right| \le C_1\int_\tau^t K_0(s)\,ds,$$

где $0<C_1$ – const и $N(t,x,t,z)\equiv 0$ при $G_3=\{(t,x,s,z)\colon 0 \le t \le T, 0 \le z \le x \le X\}$;

Вместе с уравнением (1) рассмотрим следующее сингулярно-возмущенное уравнение:

$$\varepsilon u(t,x,\varepsilon) + \int_0^t K(t,x,s)u(s,x,\varepsilon)\,ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z,\varepsilon)\,dzds = f(t,x), \qquad (2)$$

где $0<C$ – малый параметр.

В уравнении (2) сделаем подстановку:

$$u(t,x,\varepsilon) = u(t,x) + \varphi(t,x,\varepsilon),\ (t,x)\in G. \qquad (3)$$

Подстановка (3), подставляем в (2), имеем:

$$\varepsilon\varphi(t,x,\varepsilon) + \int_0^t K(t,x,s)\varphi(s,x,\varepsilon)\,ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\varphi(s,z,\varepsilon)\,dzds + \varepsilon u(t,x) = 0.$$

Из последнего уравнения имеем следующее равенство:

$$\varphi(t,x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)\varphi(s,x,\varepsilon)\,ds = \int_0^t [K(t,x,s)-K(s,x,s)]\varphi(s,x,\varepsilon)\,ds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\varphi(s,z,\varepsilon)\,dzds-u(t,x)=0. \qquad (4)$$

Применяя резольвенту ядра $\left(-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}\right)$

$$R(t,x,\varepsilon)=-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau},$$

из (4) имеем:

$$\varphi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\varphi(s,x,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\varphi(s,z,\varepsilon)dzds-$$

$$-u(t,x,)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left\{\int_0^s[K(s,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)]\varphi(\tau,x,\varepsilon)d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\varphi(\tau,z,\varepsilon)dzd\tau-u(t,x)\right\}ds.$$

Относительно этого уравнения делаем соответствующие несложные преобразования:

$$\varphi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\varphi(s,x,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\varphi(s,z,\varepsilon)dzds-$$

$$-u(t,x,)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^s K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[K(t,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)\right]\varphi(\tau,x,\varepsilon)d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^s K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[K(t,x,\tau)-K(s,x,\tau)\right]\varphi(\tau,x,\varepsilon)d\tau ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^s\int_0^z K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}N(t,x,\tau,z)\varphi(\tau,z,\varepsilon)dzd\tau ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^s\int_0^z K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[N(t,x,\tau,z)-N(s,x,\tau,z)\right]\varphi(\tau,z,\varepsilon)dzd\tau ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}u(t,x)ds-$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[u(t,x)-u(s,x)\right]ds.$$

Учитывая, что $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}ds=1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}$, и применяя формулу Дирихле, из последнего уравнения получаем:

$$\varphi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[K(t,x,s)-K(s,x,s)\right]\varphi(s,x,\varepsilon)ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\left\{\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[K(t,x,\tau)-K(s,x,\tau)\right]d\tau\right\}\varphi(s,x,\varepsilon)ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^s N(t,x,s,z)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\varphi(s,z,\varepsilon)dzds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^s\left\{\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\times\right.$$

$$\left.\times\left[N(t,x,s,z)-N(\tau,x,s,z)\right]d\tau\right\}-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}-$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[u(t,x)-u(s,x)\right]ds.$$

Отсюда:

$$\varphi(t,x,\varepsilon)=\int_0^t H(t,x,s,\varepsilon)\varphi(s,x,\varepsilon)ds+\int_0^t\int_0^x N_1(t,x,s,z,\varepsilon)\varphi(s,z,\varepsilon)dzds+F(t,x,\varepsilon), \quad (5)$$

где $H(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\left[K(t,x,s)-K(s,x,s)\right]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}-$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[K(t,x,s)-K(\tau,x,s)\right]d\tau. \quad (6)$$

$$N_1(t,x,s,z,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}N(t,x,s,z)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\left[N(t,x,s,z)-K(\tau,x,s,z)\right]d\tau. \quad (7)$$

$$F(t,x,\varepsilon)=-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)ds}-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\times\left[u(t,x)-N(s,x)\right]ds. \quad (8)$$

Для доказательства последнего равенства предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть выполняется следующее равенство:

$$F(t,x,\varepsilon)=-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)ds}-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau}\times\left[u(t,x)-N(s,x)\right]ds.$$

где $u(t,x)\in C(G), u(0,x)=0$ при $x\in[0,X], K_0(t)>0$ при всех $t\in[0,T]$, $\varphi(t)=\int_0^t K_0(s)ds$.

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|F(t,x,\varepsilon)\| \le 2N_0 \|u(t,x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + 2\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = C_0\left(\varepsilon\right),$$

где $\beta \in (0,1)$, $\omega_u\left(\delta\right) \le SUP\left|u\left(\varphi^{-1}(v),x\right) - u\left(\varphi^{-1}\left(v_0\right),x\right)\right|. \varphi^{-1}\left(\vartheta\right)$ – обратная функция к функции $\vartheta = \varphi\left(t\right)$.

Доказательство.

а) Если $0 \le t \le \varphi^{-1}\left(\varepsilon^\beta\right)$, то из (8) получаем:

$$\left|F(t,x,\varepsilon)\right| \le \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} + \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K\left(s,x,s\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\tau} u\left(t,x\right)ds = 2\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right). \quad (9)$$

б) Если $\varphi^{-1}\left(\varepsilon^\beta\right) \le t \le T$, то имеем

$$\left|u(t,x)\right| e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} \le u(t,x)_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}; \quad (10)$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varphi^{-1}\left(\varphi(t)-\varepsilon^\beta\right)} K_0\left(s\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau)d\tau}\left[u\left(t,x\right) - u\left(s,x\right)\right]ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varphi^{-1}\left(\varphi(t)-\varepsilon^\beta\right)}^t K_0\left(s\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau)d\tau} \times\right.$$

$$\left. \times\left[u\left(t,x\right) - u\left(s,x\right)\right]ds \le 2N_0 u(t,x)_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + 2\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right), \quad (11)$$

из (9), (10) и (11) получаем справедливость леммы 1.

Лемма 2. Пусть функция $H\left(t,x,s,\varepsilon\right)$ определена в равенстве (6) и выполняются условия *а*) и *б*). Тогда справедлива оценка: $\left|H\left(t,x,s,\varepsilon\right)\right| \le C_3$, где $C_3 = C(N_0 + e^{-1})$.

Доказательство. Применяя условие *б*) из (6), имеем неравенство:

$$\left|H\left(t,x,s,\varepsilon\right)\right| \le \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau} C\int_s^t K_0\left(\tau\right)d\tau + \frac{N_0}{\varepsilon^2}\int_s^t K_0\left(s\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau} Ce^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau}$$

Для первого слагаемого имеем следующее неравенство:

$$Ce^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau}\left(\int_s^t K_0\left(\tau\right)d\tau\right) = \left|\rho = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0\left(\tau\right)d\tau\right| = C\rho e^{-\rho} \le Ce^{-1}$$

А для второго слагаемого справедливо соотношение:

$$C\frac{N_0}{\varepsilon}\int_s^t K_0\left(\tau\right) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau}\left(\int_s^t K_0\left(\vartheta\right)d\vartheta\right) = \left|\begin{array}{c}\rho = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_s^t K_0\left(\tau\right)d\tau \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_s^t K_0\left(\tau\right)d\tau \ge \rho \ge 0\end{array}\right| = N_0 C\int_0^\infty \rho e^{-\rho}d\rho \le CN_0$$

Следовательно, справедлива лемма 2.

Лемма 3. Пусть функция $N_1\left(t,x,s,z,\varepsilon\right)$ определяется из равенства (7). Если выполняются условия *а*) и *в*), то справедлива оценка $\left|N_1\left(t,x,s,z.\varepsilon\right)\right| \le C_4$, где $C_4 = C_2(N_0 + e^{-1})$.

Доказательство. Принимая условия *а*) и *в*) из (7), получаем требуемую оценку.

Далее, в силу лемм 1, 2 и 3 из (5) получим:

$$\left|\varphi\left(t,x,\varepsilon\right)\right| \le C_0\left(\varepsilon\right) + \int_0^t C_3\left|\varphi\left(s,x,\varepsilon\right)\right|ds + \int_0^t\int_0^x C_4\left|\varphi\left(s,z,\varepsilon\right)\right|dzds.$$

Отсюда, введя следующую подстановку:

$$a(t,x,\varepsilon) \le C_0(\varepsilon) + \int_0^t \int_0^x C_4 \left|\varphi(s,z,\varepsilon)\right| dzds, \tag{12}$$

имеем неравенство

$$\left|\varphi(t,x,\varepsilon)\right| \le a(t,x,\varepsilon) + \int_0^t C_3 \left|\varphi(s,x,\varepsilon)\right| ds, \tag{13}$$

В дальнейшем используем следующие леммы [2].

Лемма 4. Пусть $\varphi(t), a(t) \in C[0,T]$, $a(t) \ge 0$ при $t \in [0,T]$,

$$\left|\varphi(t)\right| \le a(t) + C\int_0^t \left|\varphi(s)\right| ds, \quad t \in [0,T]$$

где $0 < C_6$ – const. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left|\varphi(t)\right| \le a(t) + C_6 \int_0^t e^{C_6(t-s)} a(s) ds, \;\; t \in [0,T]$$

Лемма 5. Пусть $\varphi(t,x), b(t,x) \in C([0,T]\times[0,X]), b(t,x) \ge 0$ и

$$\left|\varphi(t,x)\right| \le b(t,x) + C_7 \int_0^t \int_0^x \left|\varphi(s,z)\right| dzd\tau, \; (t,x) \in [0,T]\times[0,X].$$

где $0 < C_7$ – const.

Из последнего соотношения получаем следующее неравенство:

$$\left|\varphi(t,x)\right| \le b(t,x) + \int_0^t \int_0^x R(t,x,s,z) b(s,z) dzds$$

где $R(t,x,s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_7^{n+1} \frac{(t-s)^n (x-z)^n}{(n!)^2}$.

Доказательство

Пусть $\vartheta(t,x) = b(t,x) + C_7 \int_0^t \int_0^x \vartheta(s,z) dzds$, $(t,x) \in [0,T]\times[0,X]$.

Отсюда, применяя метод последовательных приближений, имеем:

$$\begin{cases} \vartheta_n(t,x) = b(t,x) + C_7 \int_0^t \int_0^x C_7 \vartheta_{n-1}(s,z) dzds, \;\; n \in N \\ \vartheta_0(t,x) = b(t,x) \end{cases}$$

$$\vartheta(t,x) = b(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\vartheta_n(t,x) - \vartheta_{n-1}(t,x)], \tag{14}$$

$$\vartheta_2(t,x) - \vartheta_1(t,x) = C_7 \int_0^t \int_0^x b(s,z) dzds,$$

$$\vartheta_2(t,x) - \vartheta_1(t,x) = C_7 \int_0^t \int_0^x C_7 [\vartheta_1(s,z) - \vartheta_0(s,z)] dz = \int_0^t \int_0^x C_7 \left(\int_0^s \int_0^z C_7 b(s_1,z_1) ds_1 dz_1 \right) dzds$$

В последнем равенстве, применяя формулу Дирихле, получаем:

$$\vartheta_2(t,x)-\vartheta_1(t,x)=\int_0^t\int_0^x C_7^2 b(s,z)(t-s)(x-z)\,dzds.$$

Используя метод математической индукции, получим:

$$\vartheta_n(t,x)-\vartheta_{n-1}(t,x)=\int_0^t\int_0^x C_7^n b(s,z)\frac{(t-s)^{n-1}(x-z)^{n-1}}{(n-1)!\cdot(n-1)!}dzds$$

Тогда из (14) получаем:

$$\vartheta(t,x)=b(t,x)+\int_0^t\int_0^x b(s,z)\left[C_7+\sum_{n=2}^{n}C_7^n\frac{(t-s)^{n-1}(x-z)^{n-1}}{(n-1)!\cdot(n-1)!}\right]dzds=$$

$$=b(t,x)+\int_0^t\int_0^x R(t,x,s,z)b(s,z)\,dzds,$$

где $R(t,x,s,z)=\sum_{n=2}^{n}C_7^n\frac{(t-s)^{n-1}(x-z)^{n-1}}{(n-1)!\cdot(n-1)!}$. $|\varphi(t,x)|\le\vartheta(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times[0,X]$.

Лемма 6 доказана.

Далее, применяем лемму 5 к неравенству (13), получим:

$$|\varphi(t,x,\varepsilon)|\le a(t,x,\varepsilon)+C_3\int_0^t e^{C_3(t-s)}a(s,x,\varepsilon)\,ds, \quad (15)$$

Подставляя (13) в (15), имеем:

$$|\varphi(t,x,\varepsilon)|\le C_0(\varepsilon)+C_4\int_0^t\int_0^x|\varphi(s,z,\varepsilon)|\,dzds+$$

$$+C_3\int_0^t e^{C_3(t-s)}\left\{C_0(\varepsilon)+C_4\int_0^t\int_0^x|\varphi(s_1,z_1\varepsilon)|\,dz_1ds_1\right\}ds.$$

Здесь, интегрируя и применяя формулу Дирихле, получаем:

$$|\varphi(t,x,\varepsilon)|=C_0(\varepsilon)e^{C_3t}+C_4\int_0^t\int_0^x e^{C_3(t-s)}|\varphi(s,z,\varepsilon)|\,dzds.$$

Затем заменив *t* на *T*, имеем:

$$|\varphi(t,x,\varepsilon)|=C_0(\varepsilon)e^{C_3t}+C_4e^{C_3t}\int_0^t\int_0^x|\varphi(s,z,\varepsilon)|\,dzds. \quad (16)$$

На равенство (16), используя лемму 5 и формулу Дирихле, получим:

$$|\varphi(t,x,\varepsilon)|=C_0(\varepsilon)e^{C_3t}b(t,x)+\int_0^t\int_0^x C_0(\varepsilon)e^{C_3T}R(t,x,s,z)\,dzds. \quad (17)$$

где $R(t,x,s,z)=\sum_{n=2}^{n}\left(C_4e^{C_3T}\right)^{n+1}\frac{(t-s)^{n-1}(x-z)^{n-1}}{(n!)^2}$.

Из (17) вытекает следующее равенство:

$$\left|\varphi(t,x,\varepsilon)\right| = C_0(\varepsilon)C_5,\ \ \forall(t,x)\in G, \tag{18}$$

где $C_0(\varepsilon) = 2N_0\left\|u(t,x)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + 2\omega_u\left(\varepsilon^{\beta}\right),\ C_5 = e^{C_3T}\left[1+R(T,X,0,0)TX\right],$

доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнятся условия *а*)–*в*) и уравнение (1) имеет непрерывное решение $u(t,x)$ на G и $u(0,x)=0$ при $x\in[0;X]$; $K_0(t)>0$ почти для всех $t\in[0;T]$. Тогда решение уравнения (2) можно представить в виде (3), и это решение приближается к непрерывному решению уравнения (1) в области G на $\varepsilon\to0$, и оценка (18) верна.

Следствие. Если $\int_0^t K_0(s)ds>0$ при всех $t\in[0;T]$ и выполняются условия *а*)–*в*).

Тогда решение уравнения (1) в пространстве $C(G)$ единственно.

Доказательство. Пусть $u(t,x)\neq0$ решение (1), при $f(t,x)\equiv0$. Тогда из условий *а*)–*в*) можно показать, что $u(t,x)=0$ на $x\in[0;X]$. На самом деле, пусть имеем:

$$\int_0^t K(t,x,s)u(s,x)ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z)dzds = f(t,x).$$

Преобразуем его в эквивалентное уравнение:

$$u(0,x)\int_0^t K(s,x,s)ds = -\int_0^t [K(t,x,s)-K(s,x,s)]u(s,x)ds - \int_0^t K(s,x,s)\left[u(s,x)-\right.$$

$$\left.-u(0,x)\right]ds - \int_0^t\int_0^x [N(t,x,s,z)-N(s,x,s,z)]u(s,z)dzds.$$

Согласно условиям *а*)–*в*) и по формуле Дирихле, заменяя τ на s, и на основании теоремы о среднем значении имеем:

$$\left|u(0,x)\right|\int_0^t K(s)ds \le \left\|u(t,x)\right\|_C C - \int_0^t K_0(s)ds\int_0^t ds +$$

$$+N_0 SUP\left|u(s,x)-u(0,x)\right|\int_0^t K_0(s)ds + \left\|u(t,x)\right\|_C C_1\int_0^t K_0(s)ds\int_0^x dz\int_0^t ds.$$

По условию теоремы $\int_0^t K_0(s)ds>0$ при всех $t\in(0,T]$. Поэтому имеем:

$$\left|u(0,x)\right| \le \left\|u(t,x)\right\|_C [Ct+C_1tx] + N_0 SUP\left|u(s,x)-u(0,x)\right|.$$

Отсюда, переходя к пределу, при $t\to0$ получим $u(t,x)=0$ для $x\in[0;X]$. Ясно, что если $f(t,x)\equiv0$ то $u(t,x,\varepsilon)\equiv0,\ \varepsilon>0$, где $u(t,x,\varepsilon)$ – решение уравнения (2).

Далее в силу теоремы имеем:

$$\left\|u(t,x)\right\|_C = \left\|u(t,x)-u(t,x,\varepsilon)+u(t,x,\varepsilon)\right\|_C \le \left\|u(t,x)-u(t,x,\varepsilon)\right\|_C + \left\|u(t,x,\varepsilon)\right\|_C =$$

$$= \left\|u(t,x)-u(t,x,\varepsilon)\right\|_C \to 0,\ \varepsilon\to0.$$ т.е. $u(t,x)\equiv0$ при почти всех $(t,x)\in G$.

Заключение

В данной работе рассмотрено интегральное уравнение Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Установлены достаточные условия единственности и построен алгоритм регуляризации для решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве $C(G)$. Результаты работы могут применяться в прикладных задачах, где вырождаются нелинейные некорректные интегральные уравнения первого рода.

Список литературы

1. Сергеев В. О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 3. С. 531-534.

2. Арсенин В.Я. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 204-210.

3. Асанов А., Камбарова А.Д. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси // Известия кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2015. № 1(34). С. 184-187.

4. Искандаров С., Бокобаева З.Б. Об оценках решений и их первыхпроизводных линейного вольтеррова неявного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Вестник института математики НАН КР. 2018. № 1. С. 49-55.

5. Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса на бесконечных областях // Вестник института математики НАН КР. 2018. № 1. С. 105-111.

6. Зулпукаров Ж.А., Алиева Ж.А. Линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными // Материалы XVII Международной научной конференции «Общество: научно-образовательный потенциал развития (идеи, ресурсы, решения)». Чебоксары, 2022. С. 15-22.

7. Зулпукаров Ж.А., Осекова Г.А. Регуляризация линейные интегральные уравнение Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными // Известия ОшТУ. 2016. № 1. С. 118-123.