

СТАТЬЯ

УДК 514

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ****Черкасова Е.Ю.***ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург,
e-mail: elena030358@mail.ru*

Начертательная геометрия (НГ) – это область знаний о построении образов объектов пространства на плоскости и создание на базе этих образов обратимых чертежей для использования в производстве различных изделий и строений. Это дисциплина, которая формирует у студентов навыки проецирования, т.е. построения плоских изображений пространственных объектов, и формулирует правила таких построений. НГ относится к циклу графических дисциплин в техническом вузе. В сочетании с компьютерным инструментарием построения изображений (проекций) НГ расширяет свои возможности и может быть использована для решения различных задач, в том числе математических. Преимуществом компьютерных графических систем в использовании их для решения графических задач является их высокая точность, позволяющая определить размер или результат построений до 8-го знака. В математике широко используется визуализация уравнений в виде графиков функций. Но возможность сдвига их на чертеже методами НГ позволила доказать, что число корней уравнений зависит только от численной величины свободного члена. Визуализация математического аппарата с «парой чисел» позволила создать теорию графического вычисления на обычной плоскости.

Ключевые слова: графические вычисления, визуализация уравнений, компьютерные графические системы, телесный угол, вычислительная графика

**APPLICATION OF DESCRIPTIVE GEOMETRY METHODS
FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS****Cherkasova E. Yu.***Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, e-mail: elena030358@mail.ru*

Descriptive geometry (NG) is a field of knowledge about the construction of images of space objects on a plane and the creation of reversible drawings based on these images for use in the production of various products and structures. This is a discipline that forms students' projection skills, i.e. the construction of flat images of spatial objects and formulates the rules of such constructions. NG belongs to the cycle of graphic disciplines in a technical university. In combination with computer tools for constructing images (projections), NG expands its capabilities and can be used to solve various problems, including mathematical ones. The advantage of computer graphics systems in using them to solve graphical problems is their high accuracy, which allows you to determine the size or result of constructions up to 8 characters. In mathematics, visualization of equations in the form of graphs of functions is widely used. But the possibility of shifting them in the drawing by NG methods allowed us to prove that the number of roots of the equations depends only on the numerical value of the free term. Visualization of the mathematical apparatus with a «pair of numbers» made it possible to create a theory of graphical calculation on an ordinary plane.

Keywords: graphical calculations, visualization of equations, computer graphics systems, solid angle, computational graphics

В международной системе единиц (СИ) [1, с. 25] указано, что единица измерения телесного угла не имеет размерности. Однако авторский метод двухкоординатной равно-великой развертки позволяет предложить и размерность, и способ ее количественного измерения [2].

Созданный в целях развития теории начертательной геометрии авторский метод проекций с временными отметками дал возможность количественно решать пространственно-временные задачи с 7 и более числом переменных [3].

Манипуляции с графиками функций дали возможность не только создать графическую теорию мнимых чисел, которая подтверждена сечениями геометрических тел (конусов вращения), но и предложить

общие математические зависимости описания некоторых «замечательных» кривых: эллипса, гиперболы и окружности [4-6].

Сугубо графическая интерпретация тригонометрических функций (синуса и косинуса) позволила создать графическую теорию, позволяющую осуществлять с ними арифметические операции сложения/вычитания, но также, что более важно, суммировать и синусоиды [7]. Метод подтвержден графическими расчетами в области теоретической электротехники [8].

Изложенные результаты графических исследований позволили обобщить их термином «вычислительная графика» [9]. Изложению методики этой дисциплины на примере решения систем уравнений посвящена данная публикация.

Материал и методы исследования

Задача 1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными (1).

$$\begin{cases} 8463x + 10602y + 10374z - 964782 = 0 \\ 598x - 874y - 247z - 11362 = 0 \\ 456x - 2052y - 288z + 16416 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Математическое решение получено вычислением определителей [10]. Приведем вычисление одного из них:

$$\begin{vmatrix} 8463 & 10602 & 10374 \\ 598 & -874 & -247 \\ 456 & -2052 & -288 \end{vmatrix} = 8463 \begin{vmatrix} -874 & -247 \\ -2052 & -288 \end{vmatrix} - 10602 \begin{vmatrix} 598 & -247 \\ 456 & -288 \end{vmatrix} + 10374 \begin{vmatrix} 598 & -247 \\ 456 & -2052 \end{vmatrix} =$$

$$= 8463(874 \cdot 288 - 2052 \cdot 247) - 10602(-598 \cdot 288 + 456 \cdot 247) + 10374(-598 \cdot 2052 + 456 \cdot 874) =$$

$$= 8463(251712 + 506844) - 10602(-172224 + 112632) + 10374(-1227096 + 398544) =$$

$$= 8463 \cdot 255132 + 10602 \cdot 59592 - 10374 \cdot 828552 =$$

$$= 2159182116 + 631794384 - 8595398448 = 10122786180.$$

Численные значения других определителей соответственно равны:

$$\Delta_x = 559186117776;$$

$$\Delta_y = 160094410476;$$

$$\Delta_z = 321627997380.$$

Арифметические действия с определителями дали численные значения решения:

$$x = 55,239302;$$

$$y = 15,816078;$$

$$z = 31,772765.$$

Учитывая то, что каждое уравнение первой степени с тремя неизвестными представляет собой плоскость, графическое решение сводится к построению линии их пересечения.

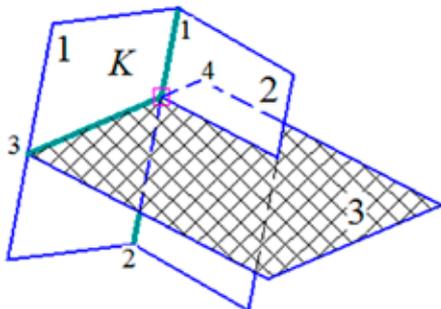


Рис. 1. Обоснование графического решения

Методика решения (рис. 1) состоит в построении линий пересечения плоскостей 1 и 2 (отрезок 1-2), а также 1 – 3 (отрезок

3-4). Ответом является точка пересечения отрезков 1-2 и 3-4.

Реализация метода начертательной геометрии выполнена в следующем порядке. Во-первых, все уравнения преобразованы в «уравнения плоскости в отрезках» [11]. Во-вторых, каждое уравнение на чертеже (рис. 2) изображено следами плоскостей (изображены тонкими линиями) по точкам их схода.

$$\begin{cases} \frac{x}{114} + \frac{y}{91} + \frac{z}{93} = 1 \\ \frac{x}{19} - \frac{y}{13} - \frac{z}{46} = 1 \\ \frac{x}{36} - \frac{y}{8} - \frac{z}{57} = 1 \end{cases}$$

Линия пересечения плоскостей 1 и 2 (стиль – основная линия) построена по проекциям точек 1 и 2 (обозначены кружками) пересечения следов.

Фронтальная проекция линии пересечения плоскостей 1 и 3 (а для решения достаточно только ее) $3_2 - 4_2$ (стиль – утолщенная линия) также построена по точкам пересечения следов 4_1 и 3_2 (отмечены кружками).

Ответом является точка пересечения (K – обозначена квадратом) проекций отрезков 1-2 и 3-4.

Измерением по чертежу координат точки K средствами компьютерной графики нашли те же значения (шесть знаков после запятой), что приведены выше, но полученные математическим путем [12].

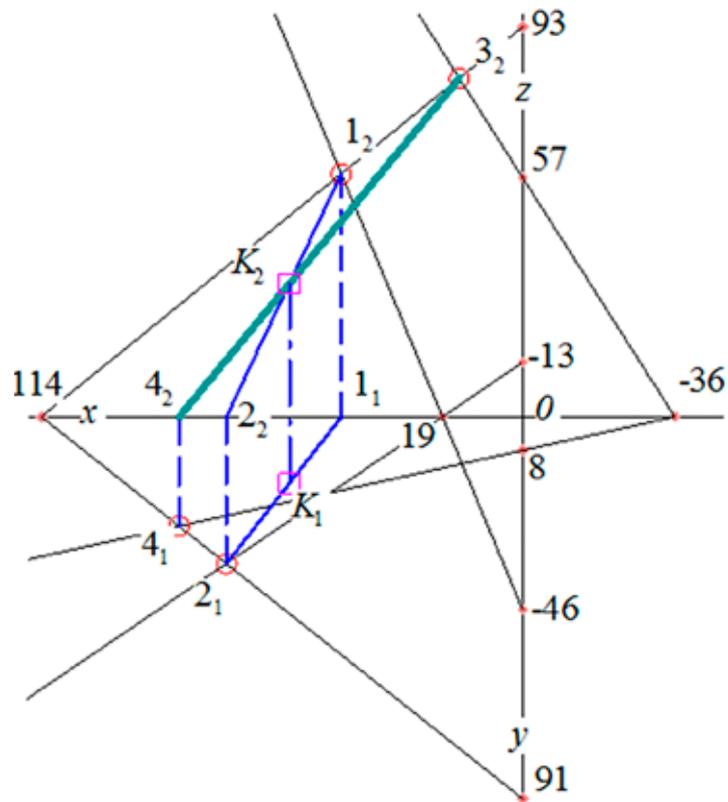


Рис. 2. Графическое решение системы уравнений (1)

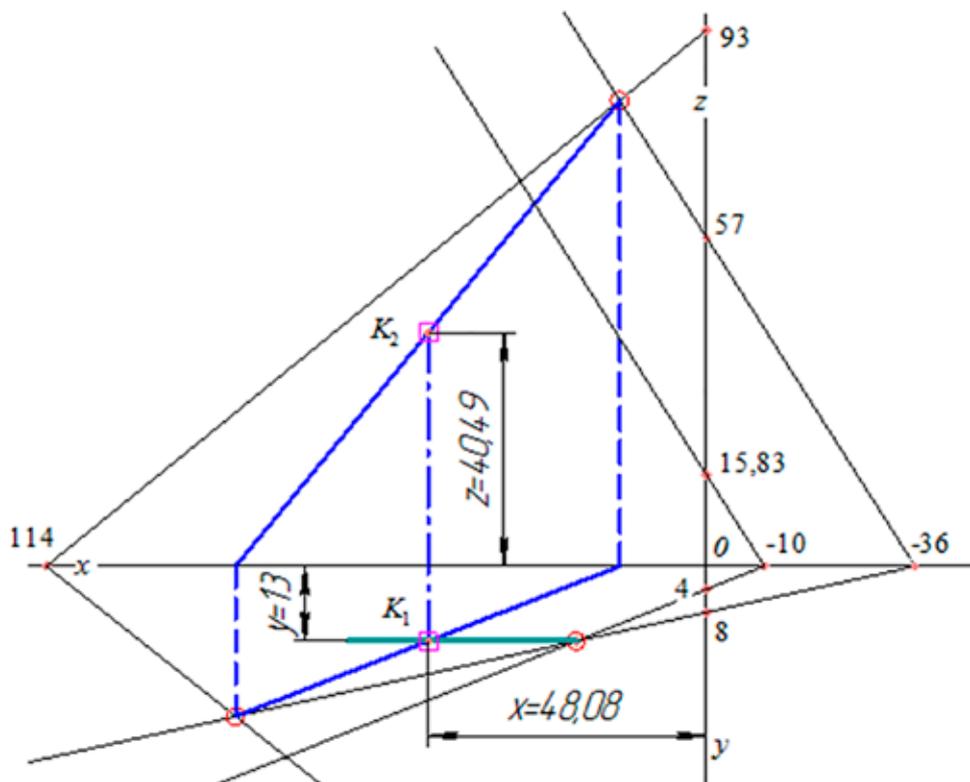


Рис. 3. Графическое решение системы уравнений (2)

В качестве примечания отметим, что в графическом варианте без дополнительных построений число знаков после запятой можно увеличить [13].

Сравним рассмотренные варианты по разным критериям.

Универсальность. Явное преимущество имеет математический способ.

Количество логических операций. В математическом методе их более 100. Это умножение, сложение, вычитание, раскрытие скобок со сменой знака. В графическом варианте: построение точек по координатам – 9, построение отрезков по точкам пересечения – 6.

Из сопоставления можно сделать вывод. Для массового применения практичнее составить и апробировать универсальную математическую программу. В конструкторской практике, при разовом использовании, более удобен графический вариант.

Особенность графического решения, помимо очевидной простоты и логичности, состоит в возможности быстрого решения одной задачи с изменяющимися параметрами.

Задача 2. Решить систему уравнений (1) с измененными условиями.

В качестве примера, в подтверждение сказанного, на рисунке 3 показано решение системы (2), в которой по сравнению с (1) целиком заменено 2-е уравнение.

$$\begin{cases} 8463x + 10602y + 10374z - 964782 = 0 \\ -63,33x + 158,33y + 40z - 633,33 = 0 \\ 456x - 2052y - 288z + 16416 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

При сохранении изображения плоскостей 1 и 3 вместе с линией их пересечения решением является построение следов новой плоскости и линии пересечения ее с первой плоскостью. Ответ – координаты точки пересечения двух отрезков.

В данном примере для получения ответа потребовалась лишь одна проекция искомой линии, поскольку учтена параллельность фронтальных следов, как это использовано при решении аналогичной задачи в учебнике [14].

Данные графические процедуры можно проводить неограниченное число раз, изменяя последовательно либо один параметр, либо уравнение в целом. Такое возможно, например, при поиске оптимального варианта исходных параметров. Расширительно подобное решение можно толковать как своеобразную графическую программу.

Так на примере решения задач на определение корней системы уравнений с тремя

неизвестными графическим способом в системе Компас 3D показано преимущество графического способа решения, которое состоит в следующем.

1. Высокая точность вычислений – до 8-го знака после запятой.

2. Простота построений с применением метода проецирования, которая позволяет затратить меньше времени на решение задачи.

3. Возможность многовариантного решения, заложенная в самом графическом построении, где изменение условий легко реализуется и позволяет получить новый результат.

4. Сокращение количества этапов решения, что оптимизирует временные затраты и делает метод более простым для решения.

5. Универсальность в применении графического метода для решения любых математических задач.

Заключение

Вычислительная графика, обладающая вышеперечисленными преимуществами, является перспективной областью развития научных исследований, ее возможности могут быть применены в смежных областях знаний, например в разделах теоретической механики, электротехники, при изучении материаловедения, выполнении различных технических прочностных расчетов, при изучении сопротивления материалов, деформации, и в других общеобразовательных и общетехнических областях научной деятельности.

Графические способы решения вырабатывают навыки визуального восприятия информации, замены привычных формул графическими объектами, изучение и восприятие которых способствуют развитию пространственного мышления – навыка, востребованного в практической инженерной деятельности. Работа с графической информацией – составляющая часть деятельности при проектировании, на стадии разработки технологии и в производстве любого технического объекта [15]. Сочетание математических расчетов с графическими построениями развивает способности специалистов технического профиля к решению возникающих задач нестандартным путем с минимальными временными затратами и оптимальным способом.

Список литературы

1. Бурдун Г.Д. Справочник по Международной системе единиц. М.: Изд-во стандартов, 1977. 232 с.
2. Савельев Ю.А., Черкасова Е.Ю. Количественное измерение телесных углов // Вестник УрГУПС. 2015. № 4(28). С. 32-42.

3. Савельев Ю.А. Четырехмерный континуум пространство – время // Вестник УрГУПС. 2013. № 1(17). С. 14-23.
4. Гирш А.Г. Построение сферы по мнимым точкам // Геометрия и графика. 2022. Т. 10. № 3. С. 3-11.
5. Черкасова Е.Ю. Построение эллипса – метод начертательной геометрии // Инновационный транспорт. 2014. № 3. С. 49-52.
6. Черкасова Е.Ю. Применение методов начертательной геометрии для решения физических задач // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2022. № 12. С. 88-91.
7. Савельев Ю.А., Бабич Е.В. Графическая тригонометрия в модернизации существующих и проектировании новых машин и механизмов // Инновационный транспорт. 2017. № 31(23). С. 55-62.
8. Савельев Ю.А., Черкасова Е.Ю. Вычислительная графика в решении нетрадиционных задач // Геометрия и графика. 2020. Т. 8. № 1. С. 33-44.
9. Сальков Н.А. Геометрическая составляющая технических инноваций // Геометрия и графика. 2018. Т. 6. № 2. С. 85-93.
10. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: АСТ, Астрель, 2010. 703 с.
11. Панчук К.Л., Любчинов Е.В. Циклографическая интерпретация и компьютерное решение одной системы алгебраических уравнений // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 3. С. 3-14.
12. Савельев Ю.А. К определению числа корней // Геометрия и графика. 2013. Т. 1. № 1. С. 24–25.
13. Черкасова Е.Ю. Методические основы компьютерной начертательной геометрии // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2021. № 6. С. 68-73.
14. Траутман Н.Ф. Сборник задач по начертательной геометрии. М.: Машгиз, 1953. 279 с.
15. Туркина Л.В. Реализация интерактивного подхода при выполнении практических заданий в курсе инженерной графической подготовки // Современные проблемы науки и образования. 2020. № 2. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=29656> (дата обращения: 27.05.2023).