

СТАТЬЯ

УДК 519.2:369

**НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ
НЕПРЕРЫВНОЙ ПОЖИЗНЕННОЙ РЕНТЫ
ПО МОДЕЛЬНЫМ И РЕАЛЬНЫМ ДАННЫМ****¹Губина О.В., ²Кошкин Г.М.***¹ФГБОУ ВО «Российский государственный университет правосудия»,
Томск, e-mail: gov7@mail.ru;**²ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет»,
Томск, e-mail: kgm@mail.tsu.ru*

Теория пенсионных рент тесно связана с идеологией нетто-премий теории страхования жизни. Математическая теория страхования широко используется при решении многих задач, которые определяются требованиями рыночной экономики. Требования практики дают толчок развитию теории страхования и тесно связанной с ней теории рент и вынуждают исследователей обращаться к более сложным математическим моделям в указанной области. Появляются новые методы расчета рент, которые сокращают время принятия оптимальных решений в условиях отсутствия достаточной информации о рынках новых видов пенсионных услуг. Целью работы является исследование свойств непараметрических оценок пожизненной ренты по модельным и реальным данным продолжительностей жизни жителей одного из районов Томской области. Модельные данные генерируются известным в прикладной статистике методом исключения из распределения Мэйкхама, который широко используется на практике в теории страхования жизни. Это распределение характеризуется следующим важным свойством: для малых возрастов оно учитывает смертность от несчастных случаев, при этом с увеличением возраста влияние несчастных случаев на смертность ослабевает. Критерием качества исследуемых оценок служит эмпирическая среднеквадратическая ошибка. Показывается, что эмпирические среднеквадратические ошибки оценок, построенных по выборкам из распределения Мэйкхама и по выборкам реальных данных, убывают с ростом объемов наблюдений.

Ключевые слова: непараметрическое оценивание, пожизненная рента, среднеквадратическая ошибка (СКО), моделирование

**NONPARAMETRIC EVALUATION OF CONTINUOUS WHOLE
LIFE ANNUITIES BASED ON MODEL AND REAL DATA****¹Gubina O.V., ²Koshkin G.M.***¹Russian State University of Justice, Tomsk, e-mail: gov7@mail.ru;**²National Research Tomsk State University, Tomsk, e-mail: kgm@mail.tsu.ru*

The theory of pension annuities is closely related to the ideology of net premiums of the life insurance theory. The mathematical theory of insurance is widely used to solve many problems that are determined by the requirements of the market economy. The requirements of practice give impetus to the development of insurance theory and the closely related theory of annuities and force researchers to turn to more complex mathematical models in this area. New methods of calculating annuities appear that reduce the time for making optimal decisions in the absence of sufficient information about the markets of new types of pension services. The aim of the work is to study the properties of nonparametric estimates of life annuity based on model and real data on the life expectancy of residents of one of the districts of the Tomsk region. The model data are generated by the method of exclusion from the Makeham distribution, which is well known in applied statistics and is widely used in practice in the theory of life insurance. This distribution is characterized by the following important property: for young ages, it takes into account mortality from accidents, while with increasing age, the effect of accidents on mortality weakens. The quality criterion of the studied estimates is the empirical mean square error. It is shown that the empirical root-mean-square errors of estimates constructed from samples from the Makeham distribution and from samples of real data decrease with increasing volumes of observations.

Keywords: nonparametric estimation, whole life annuity, mean squared error (MSE), simulations

Введение

Современный этап развития общественных социально-экономических отношений требует нетривиальных подходов к идеологии расчета пенсионных рент [1, с. 13–46, 170–194], что связано:

– с влиянием на страховой рынок таких непредсказуемых явлений, как эпидемии, природные катастрофы, социальные катаклизмы и т.п. [2–4],

– с появлением новых видов страховых и пенсионных услуг [5, 6].

Согласно работе Г.И. Фалина пожизненная рента определяется как денежная сумма, выплачиваемая человеку раз в год в течение его жизни [1, с. 170–172]. Для удобства расчетов такую денежную сумму принимают равной условной единице. Таким образом, пожизненную ренту можно определить следующей формулой [1, с. 183–184; 7]:

$$\bar{a}_x(\delta) = \delta^{-1}(1 - \Phi(x, \delta)/S(x)), \quad (1)$$

где x – возраст человека, когда начинаются выплаты платежей, δ – интенсивность процентов, $S(x) = P(X > x)$ является функцией выживания случайной величины X , которая определяет продолжительность его жизни,

$$\Phi(x, \delta) = -e^{\delta x} \int_x^{\infty} e^{-\delta t} dS(t). \quad (2)$$

Суть пожизненной ренты состоит в следующем: заключивший договор клиент возраста x перечисляет компании сумму $\bar{a}_x(\delta)$ условных денежных единиц; затем компания будет в течение всей его жизни каждый год платить по одной условной единице денежных сумм. Понятно, что $\bar{a}_x(\delta) \gg 1$.

Рассмотрим задачу оценивания непрерывных пожизненных рент по выборке X_1, \dots, X_n продолжительностей жизни индивидуумов [8–10]. Использование классических методов статистической обработки данных часто не позволяет получать адекватные модели, на основе которых строится стратегия развития страховой компании. При использовании классических параметрических оценок и моделей требуется информация об изучаемом явлении с точностью до неизвестных параметров. На практике часто возникают проблемы с выбором подходящих параметрических оценок и моделей. Обработка данных с привлечением методов непараметрической статистики позволяет синтезировать простые и адекватные (с известными статистическими свойствами) оценки и модели в условиях, когда информация об изучаемом явлении носит общий характер [11].

В статье исследуются свойства непараметрических оценок пожизненной ренты (1), построенных по модельным и реаль-

ным данным продолжительностей жизни индивидуумов. Модельные данные генерируются согласно распределению Мэйкхама. Показывается, что эмпирические среднеквадратические ошибки (СКО) оценок, построенных по выборкам из распределения Мэйкхама, а также по выборкам реальных данных, убывают с ростом объемов наблюдений. Таким образом, качество оценивания улучшается с ростом объемов выборок.

Отметим, что полученные результаты оценивания ренты (1) распространяются на общий случай функционалов рент, описывающих, в частности, и новые виды страховых услуг [12, с. 52–63; 13].

Целью работы является исследование свойств непараметрических оценок пожизненной ренты по модельным и реальным данным продолжительностей жизни жителей одного из районов Томской области.

Проведем синтез оценки ренты (1). Сначала оценим $S(x)$ в формуле (1) эмпирической функцией выживания

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i > x), \quad (3)$$

где X_1, \dots, X_n – случайная выборка продолжительностей жизни индивидуумов, $I(X_i > x)$ – индикатор события $X_i > x$, n – объем выборки. Как известно, эмпирическая функция выживания является непараметрической оценкой.

Подставив $S_n(x)$ (3) в функционал (2), имеем

$$\Phi_n(x, \delta) = \frac{e^{\delta x}}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\delta X_i} I(X_i > x),$$

откуда согласно формуле (1) в качестве непараметрической оценки ренты получаем

$$\bar{a}_x^n(\delta) = \delta^{-1} \left(1 - \frac{e^{\delta x}}{S_n(x) \cdot n} \sum_{i=1}^n e^{-\delta X_i} I(X_i > x) \right) = \delta^{-1} \left(1 - \frac{\Phi_n(x, \delta)}{S_n(x)} \right). \quad (4)$$

Качество оценки пожизненной ренты $\bar{a}_x^n(\delta)$ (4) будем характеризовать ее СКО:

$$u^2(\bar{a}_x^n(\delta)) = E \left(\bar{a}_x^n(\delta) - \bar{a}_x(\delta) \right)^2.$$

Теорема [7]. Если функция выживания $S(x)$ непрерывна, $S(x) > 0$, то СКО оценки (4)

$$u^2(\bar{a}_x^n(\delta)) = \frac{\Phi(x, 2\delta)S(x) - \Phi^2(x, \delta)}{n\delta^2 S^3(x)} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

При моделировании рент ограничимся законом Мэйкхама, который для малых возрастов учитывает смертность от несчастных случаев, причем с увеличением возраста влияние несчастных случаев на смертность ослабевает [13–15].

Материалы и методы исследования

Итак, перейдем к оцениванию ренты по статистическим данным, полученным методом исключения для распределения Мэйкхама, которое определяется тремя параметрами A , B , α , для которой функция выживания [13–15]

$$S(x) = \exp \left[-Ax - \frac{B}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1) \right],$$

а пожизненная рента $\bar{a}_x(A, B, \alpha, \delta)$ согласно формуле (1) принимает вид

$$\bar{a}_x(A, B, \alpha, \delta) = \frac{1 - \int_0^{\infty} (A + Be^{\alpha(x+t)}) \exp \left[-(\delta + A)t - \frac{B}{\alpha} (e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}) \right] dt}{\delta}, \quad (5)$$

где параметр A учитывает влияние несчастных случаев на смертность, а величина $Be^{\alpha x}$ – влияние возраста на смертность.

Интегралы в (5) вычисляются приближенно методом трапеций при $\delta = 0,1$, $A = 0,0007$, $B = 0,00005$, $\alpha = 0,092$. Приведем на рис. 1 график соответствующей плотности вероятности Мэйкхама $f(x) = -S'(x)$.

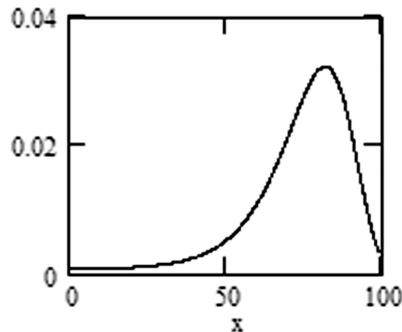


Рис. 1. Плотность вероятности Мэйкхама при $A = 0,0007$, $B = 0,00005$, $\alpha = 0,092$

В табл. 1 приводятся теоретические значения ренты, вычисленные по формуле (5).

Таблица 1

Величины ренты (5) для различных возрастов x
при $A = 0,0007$, $B = 0,00005$, $\alpha = 0,092$, $\delta = 0,1$

x лет	10	20	30	40	50	60	70	80	90
\bar{a}_x	9,87	9,79	9,64	9,32	8,74	7,76	6,31	4,54	2,81

Зависимости ренты $\bar{a}_x(0,0007;0,00005;0,092;0,1)$ (5) и их оценок (4)

$$\bar{a}_x^n(0,1) = \frac{1}{0,1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n e^{-0,1(X_i-x)} I(X_i > x)}{\sum_{i=1}^n I(X_i > x)} \right) \quad (6)$$

от возраста x для $n = 50, 100, 500$ из распределения Мэйкхама представлены на рис. 2.

Теперь рассмотрим оценивание ренты по реальным данным. В одном из районов Томской области было зарегистрировано 410 смертей (2001 г.), на основании чего была получена исходная выборка продолжительностей жизни объема $n = 410$. Построены непараметрические оценки (6) ренты $\bar{a}_x(0,1)$ по всей исходной выборке, а также по случайным выборкам объема 50, 100, 250, которые состоят из элементов исходной выборки. Оценку ренты $\bar{a}_x^{410}(0,1)$, построенную по всей выборке, назовем эталонной оценкой.

Оценки ренты (6) для $n = 50, 100, 250, 410$ и $x \in (0, 90)$ представлены на рис. 3.

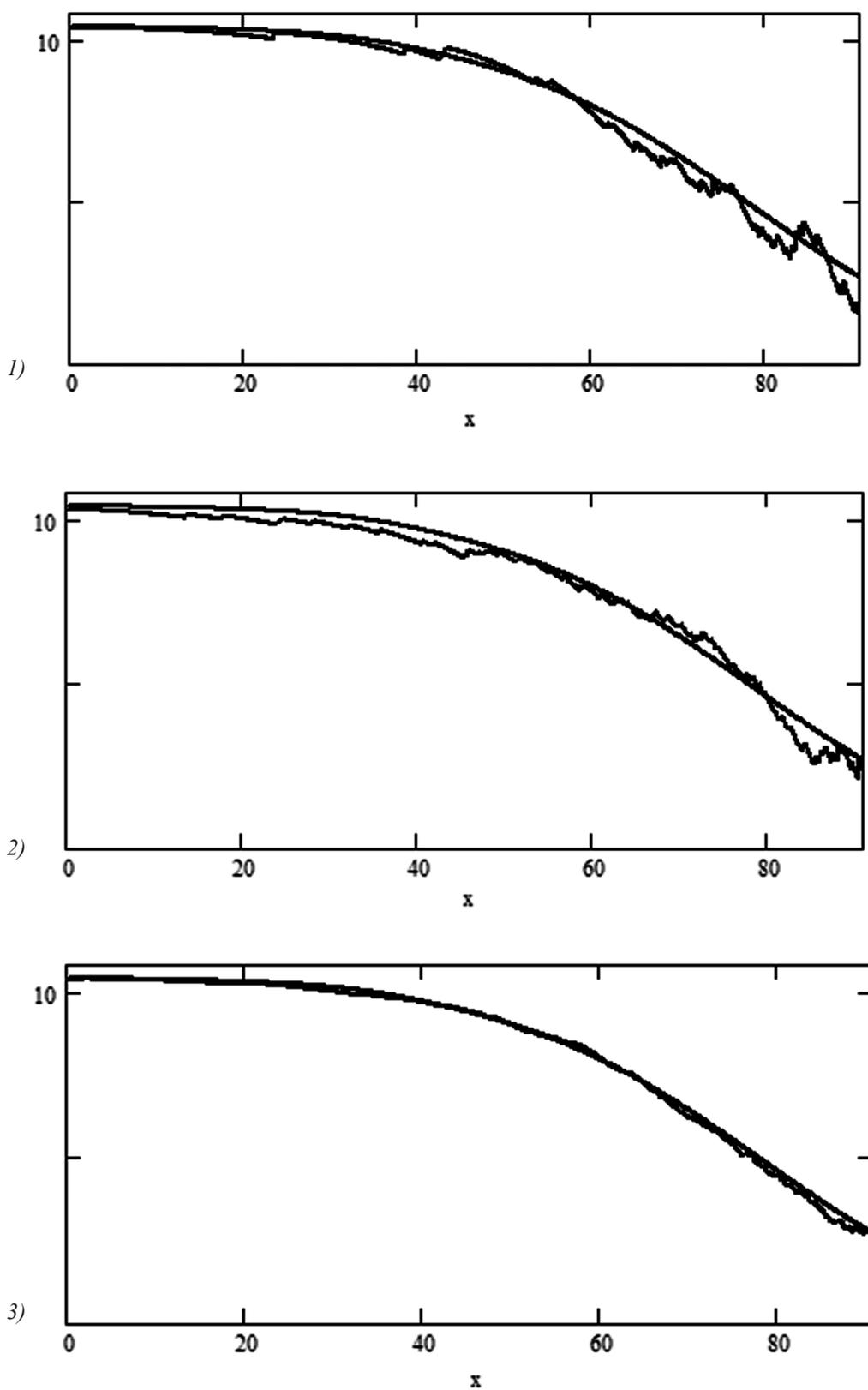


Рис. 2. Зависимость ренты $\bar{a}_x(0,0007;0,00005;0,092;0,1)$ (гладкая функция) и ее оценки $\bar{a}_x^n(0,1)$ (пилообразные функции) от возраста x при n : 1) 50; 2) 100; 3) 500

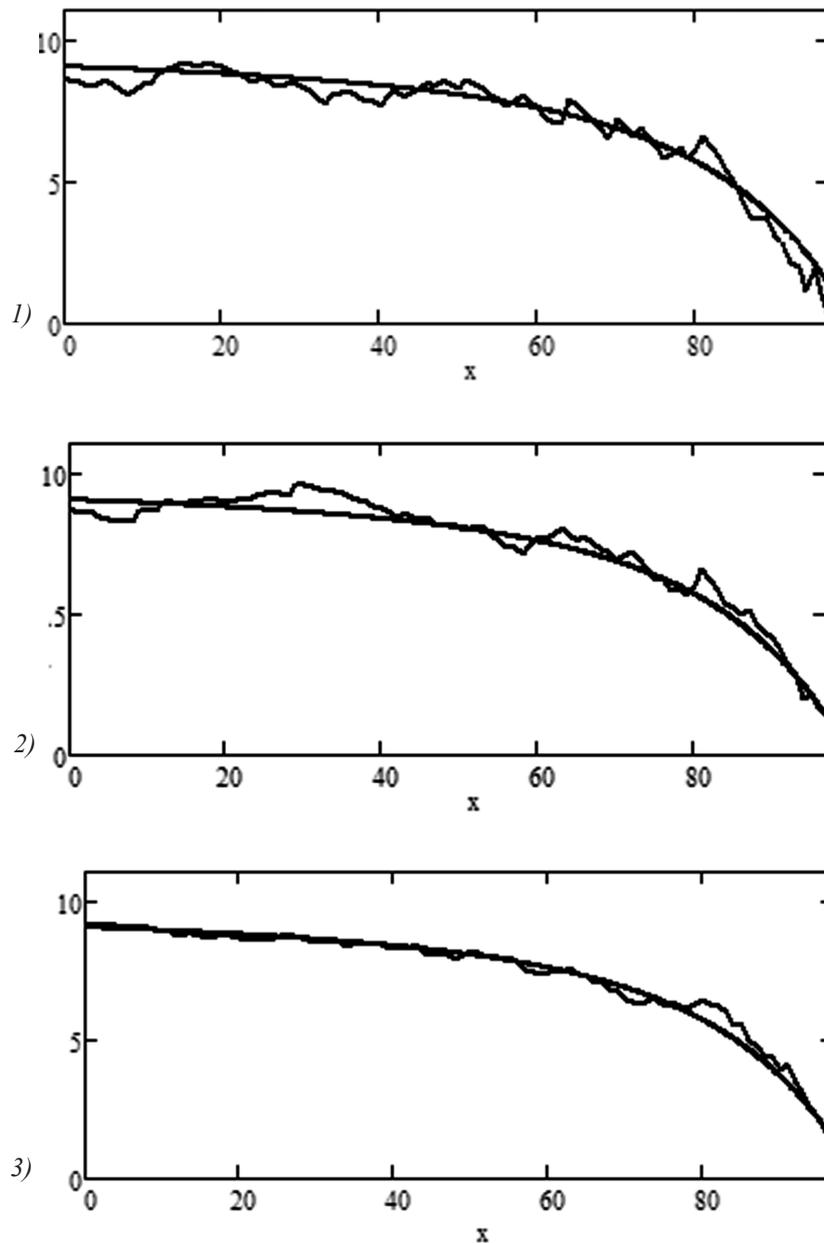


Рис. 3. Эталонные оценки ренты $\bar{a}_x^{410}(0,1)$ (б) (гладкая функция) и оценки $\bar{a}_x^n(0,1)$ (б) (пилообразные функции) для n : 1) 50; 2) 100; 3) 250

Результаты исследования и их обсуждение

Из рис. 2 следует, что модули разностей $|\bar{a}_x^n(0,1) - \bar{a}_x(0,0007; 0,00005; 0,092; 0,1)|$ между оценками рент $\bar{a}_x^n(0,1)$ и истинной рентой $\bar{a}_x(0,0007; 0,00005; 0,092; 0,1)$ с ростом n стремятся к нулю для каждого $x \in (0, 90)$.

Критерием качества оценок (б) может служить эмпирическая СКО

$$G(n; 0,0007; 0,00005; 0,092; 0,1) = \frac{1}{100} \sum_{x=0}^{99} (\bar{a}_x(0,0007; 0,00005; 0,092; 0,1) - \bar{a}_x^n(0,1))^2. \quad (7)$$

В табл. 2 приводятся для различных n значения эмпирических СКО (7).

Таблица 2

Значения эмпирических СКО (7) для оценок рент (6) при различных n

N	50	100	250	500
$G(n; 0, 0007; 0, 00005; 0, 092; 0, 1)$	0,0475	0,00591	0,00062	0,00093

Видим, что согласно табл. 2 качество оценивания улучшается с ростом n .

Аналогичные выводы справедливы и при использовании оценок рент по реальным данным. Из рис. 3 следует, что модули разностей $|\bar{a}_x^n(0,1) - \bar{a}_x^{410}(0,1)|$ между оценками рент $\bar{a}_x^n(0,1)$ и эталонной рентой $\bar{a}_x^{410}(0,1)$ с ростом n стремятся к нулю для каждого $x \in (0, 90)$.

Критерием качества оценок (6), построенных по реальным выборкам объема $n = 50, 100, 250$ относительно эталонной ренты, возьмем

$$G(n; 0, 1) = \frac{1}{100} \sum_{x=0}^{99} (\bar{a}_x^{410}(0, 1) - \bar{a}_x^n(0, 1))^2. \quad (8)$$

В табл. 3 приводятся значения эмпирических СКО (8) для $n = 50, 100, 250$.

Таблица 3

Значения эмпирических СКО (8) для оценок рент (6) при различных n

n	50	100	250
$G(n)$	0,456	0,247	0,104

Согласно табл. 3 качество оценивания также улучшается с ростом n .

Заключение

В статье изучаются свойства оценок пожизненных рент, построенных по модельным и реальным данным. Модельные данные генерируются методом исключения согласно распределению Мэйкхама, которое широко используется на практике. Показывается, что эмпирические СКО оценок, построенных по выборкам из распределения Мэйкхама (7) и по выборкам реальных данных (8), уменьшаются с ростом объемов выборок. Это подтверждает состоятельность оценок согласно утверждению теоремы о СКО оценки ренты (4).

Список литературы

1. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Анкил, 2002. 262 с.
2. Аль-Натор М.С., Аль-Натор С.В., Соловьев А.К. Актуарно-статистическое обоснование пенсионного возраста в условиях социально-экономической неопределенности // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2018. Т. 5, № 1. С. 144–148.
3. Ованесян Н.М., Мидлер Е.А. Долгосрочное страхование жизни как фактор устойчивого развития рынка страховых услуг в инфляционной среде // Финансовые исследования. 2016. № 1 (50). С. 128–134.
4. Роиц В.Д. Пути совершенствования страхования рисков профессиональных заболеваний // Охрана и экономика труда. 2013. № 2 (23). С. 4–14.
5. Соловьев А.К. Риски прогнозирования пенсионной реформы в условиях цифровизации // Вестник кафедры статистики Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова: Статистические исследования социально-экономического развития России и перспективы устойчивого роста: материалы и доклады / Под общ. ред. Н.А. Садовниковой. М., 2018. С. 257–260.
6. Winter P., Planchet F. Modern tontines as a pension solution: a practical overview premium // European Actuarial Journal. 2022. Vol. 12. P. 3–32.
7. Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание актуарной современной стоимости полной непрерывной пожизненной ренты // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 38–43.
8. Кокина Е.П., Трегубова А.А. Формирование тарифных классов страхования: применение статистических методов // Финансовые исследования. 2015. № 2 (47). С. 115–122.
9. Awondo S., Ramirez O., Datta G.S., Colson G., Fonsah E.G. Estimation of Crop Yields and Insurance Premiums Using a Shrinkage Estimator // North American Actuarial Journal. 2018. Vol. 22, Is. 2. P. 289–308.
10. Губина О.В., Кошкин Г.М. Оценивание современной стоимости n -летней ренты для смешанного страхования жизни // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 50. С. 39–46.
11. Hu J., Hong L. A nonparametric sequential learning procedure for estimating the pure premium // European Actuarial Journal. 2022. Vol. 2. P. 485–502.
12. Кошкин Г.М. Введение в математику страхования жизни. Томск: ТГУ, 2004. 112 с.
13. Koshkin G.M., Gubina O.V. Estimation of the Present Values of Life Annuities for the Different Actuarial Models // Proceedings of the Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management (Beer Sheva, Israel, February 15–18, 2016). Conference Publishing Services. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 2016. P. 506–510.
14. Castellares F., Patricio S.C., Lemonte A. On the Gompertz – Makeham law: A useful mortality model to deal with human mortality // Brazilian Journal of Probability and Statistics. 2022. Vol. 36, Is. 3. P. 613–639.
15. Bowie D.C. Analytic expression for annuities based on Makeham – Beard mortality laws // Annals of Actuarial Science. 2021. Vol. 15. P. 1–13.