СТАТЬЯ

УДК 517.968

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Сапарова Г.Б., Зулпукаров Ж.А.

Ошский технологический университет, Ош,
e-mail: gulya141005@mail.ru, zulpukarov66@mail.ru

Аннотация. В последнее время наблюдается резкий интерес к теории интегральных уравнений, называемых некорректными задачами, поэтому исследование таких задач актуально, что связано с важностью данной темы. Интегральные уравнения являются важными приложениями в области математики, так как они являются активно развивающимися в приложениях таких наук, как физика, техника, аэродинамика, электродинамика. Теория интегральных уравнений Вольтерра очень интенсивно развивается в настоящее время, но все еще слабо развиты и мало изучены системы таких уравнений первого и третьего родов. Также недостаточно исследованы методы регуляризации и численные решения систем этих уравнений в том случае, когда известная функция при заданной функции вне интеграла обращается в нуль во внутренних точках отрезка. В данной работе исследовано решение системы интегрального уравнения Вольтерра первого рода в случае двух независимых переменных. Так как системы уравнений до конца еще не рассмотрены в пространствах обобщенных функций и найти их точное решение можно только в очень редких частных случаях, особенно актуальной является разработка приближенных методов их решения, то есть в виде построения регуляризации в классах обобщенных функций с соответствующим теоретическим обоснованием.

Ключевые слова: решение, регуляризация, лемма, резольвента, системы, формула, метод

ABOUT ONE SYSTEM OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Saparova G.B., Zulpukarov Zh.A.

Osh Technological University, Osh, e-mail: gulya141005@mail.ru, zulpukarov66@mail.ru

Annotation. Recently, there has been a sharp interest in the theory of integral equations, called ill – posed problems, so the study of such problems is relevant, which is due to the importance of this topic. Integral equations are important applications in the field of mathematics, since they are actively developing in applications of such sciences as: physics, technology, aerodynamics, electrodynamics. The theory of Volterra integral equations is developing very intensively at the present time, but systems of such equations of the first and third kind are still poorly developed and little studied. Also, regularization methods and numerical solution of systems of these equations have not been sufficiently studied in the case when a known function, for a given function outside the integral, vanishes at the interior points of the segment. In this paper, the solution to the system of Volterra integral equations of the first kind is investigated in the case of two independent variables. Since systems of equation have not yet been fully considered in the spaces of generalized functions and their exact solution can be found only in very rare special cases, the development of approximate methods for solving them is especially relevant, that is, in the form of constructing a regularization in classes of generalized functions with an appropriate theoretical justification.

Keywords: solution, regularization, lemma, resolvent, systems, formula, method

Интегральные уравнения Вольтерра очень широко применяются в задачах астрономии, биологии, экологии, электродинамики и механики [1]. С каждым днем все больше появляются новые области, где находят свои применения интегральные уравнения Вольтерра первого, второго и третьего родов. В работах А. Асанова, М. Иманалиева, С. Искандарова рассмотрены методы регуляризации, с помощью которых в теории интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего родов доказывается существование и единственность решения [2, 3].

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода являются некорректными задачами, и для их решения не могут быть применены стандартные методы, чтобы найти их решение, был использован метод приближенных решений, которые применяли в своих трудах В.О. Сергеев, Ж.А. Зулпукаров, Г.Б. Сапарова [4–6].

Материалы и методы исследования

В данной работе исследована система интегральных уравнений Вольтерра первого рода, в случае с двумя независимыми переменными, с помощью сингулярно-возмущенных уравнений методом регуляризации были доказаны существование и единственность решения данной системы.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассматривается система

$$\int_0^t K(t,x,s)u(s,x)\,ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z)\,dzds = f(t,x),(t,x)G, \tag{1}$$

где $K(t,x,s)$ и $N(t,x,s,z)$ – $(n\text{x}n)$ – матрицы функции, а $u(t,x)$ – искомая и $f(t,x)$ – заданная n – мерные вектор-функции на $G = \{(t,x)\colon 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le X\}$, $f(0,x) = 0$ при $x \in [0, X]$.

Введем норму, для $n\text{x}n$ – матрицы $A = (a_{ij})$ следующим образом:

$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и для n–мерных векторов $u = (u_1,\ldots,u_n)$ в виде $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Введем переменную

$$\lambda(t,x,t) = \min_i\{\lambda_i(t,x)\},\ (t,x)\in G,\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Потребуем выполнение следующих условий:

а) $\|K(t,x,s)\| \in C(G_1)$, $\|N(t,x,s,z)\| \in C(G_2)$, $\|K(t,x,t)\| \le N_0\lambda_0(t)$ и $\lambda(t,x) \ge \lambda_0(t)$ при $(t,x)\in G$, где N_0 – const, $\lambda(t,x)$ – определена с помощью формулы (2), $\lambda_0(t) \in L_1(0.T)$;

б) при $t > \tau$ для любых $(t,x,s),(\tau,x,s)\in G_1 = \{(t,x,s)\colon 0 \le s \le t \le T;\ 0 \le x \le X;\ \}$ справедливо

$$\|K(t,x,s) - K(\tau,x,s)\| \le C\int_\tau^t \lambda_0(s)\,ds,$$

где $0<C$ – const;

в) при $t > \tau$ для любых $(t,x,s,z),(\tau,x,s,z)\in G_2 = \{(t,x,s,z)\colon 0 \le s \le t \le T;\ 0 \le z \le x \le X\}$ справедливо

$$\|N(t,x,s,z) - N(\tau,x,s,z)\| \le C_1\int_\tau^t \lambda_0(s)\,ds,$$

где $0 < C_1$ – const и $N(t,x,t,z) \equiv 0$ при $(t,x,z)\in G_4 = \{(t,x,z)\colon 0 \le t \le T;\ 0 \le z \le x \le X\}$;

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\varepsilon u(t,x,\varepsilon) + \int_0^t K(t,x,s)u(s,x,\varepsilon)\,ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z,\varepsilon)\,dzds = f(t,x), \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

Решение системы (3) будем искать в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = u(t,x) + \varphi(t,x,\varepsilon),\ (t,x)\in G. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), имеем

$$\varepsilon\varphi(t,x,\varepsilon) + \int_0^t K(t,x,s)\varphi(s,x,\varepsilon)\,ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\varphi(s,z,\varepsilon)\,dzds + \varepsilon u(t,x) = 0. \tag{5}$$

Из (5) получаем следующую систему:

$$\varphi(t,x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,s)\varphi(s,x,\varepsilon)\,ds = \int_0^t [K(t,x,s) - K(s,x,s)]\varphi(s,x,\varepsilon)\,ds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\varphi(s,z,\varepsilon)\,dzds - u(t,x) = 0.\ 6 \tag{6}$$

Резольвента матричного ядра $\left(-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}\right)$ имеет вид

$$R(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s),\quad \varepsilon>0, \tag{7}$$

где $X(t,x,y,s,\varepsilon)$ – матричная функция Коши системы $\varepsilon X_t^1(t,x,s)=-K(t,x,t)X(t,x,s,\varepsilon)$, $X(t,x,s,\varepsilon)=E_n, E_n-$ единичная матрица.

Отметим следующие свойства матричной функции $X(t,x,s,\varepsilon)$:

$$1^0.\ X(t,x,s,\varepsilon)=X(t,x,\varepsilon)\cdot X^{-1}(s,x,\varepsilon), \tag{8}$$

где $X^{-1}(t,x,y,\varepsilon)$ – обратная матрица матрицы $X(t,x,y,\varepsilon)$

$$2^0.\ \left[X(t,x,s,\varepsilon)\right]_s^1=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s), \tag{9}$$

$$\left[X(t,x,s,\varepsilon)\right]_s^1=-\frac{1}{\varepsilon}K(t,x,t)X(t,x,s,\varepsilon). \tag{10}$$

3^0. В силу неравенств Важевского и в силу условия а) имеет место

$$X(t,x,s,\varepsilon)\le\sqrt{n}exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s\,0}^{t}(\tau)d\tau\right\}.(t,x,s)\in G_1\ 11 \tag{11}$$

Далее, с помощью резольвенты $R(t,x,y,s,\varepsilon)$,

$$\varphi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\varphi(s,x,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^s X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)\times$$

$$\times\left[K(s,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)\right]\varphi(\tau,x,\varepsilon)d\tau ds-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,\varepsilon)\varphi(s,z,\varepsilon)dzds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^s\int_0^x X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)N(s,x,\tau,z)\varphi(\tau,z,\varepsilon)dzd\tau ds-u(t,x)+$$

$$+u(t,x)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)\varphi(s,x,\varepsilon)ds.$$

Используя формулу Дирихле и учитывая (9), (10), последнюю преобразуем к следующему виду:

$$\varphi(t,x,\varepsilon)=\int_0^t H(t,x,s,\varepsilon)\varphi(s,x,\varepsilon)ds+\int_0^t\int_0^x N_1(t,x,s,z,\varepsilon)\varphi(s,z,\varepsilon)dzds+F(t,x,\varepsilon), \tag{12}$$

$$\text{где } H(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,s,\varepsilon)\left[K(t,x,s)-K(s,x,s)\right]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,\tau)\left[K(t,x,s)-K(\tau,x,s)\right]d\tau. \tag{13}$$

$$N_1(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,s,\varepsilon)N(t,x,s)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,\tau)\times\left[N(t,x,s,z)-N(\tau,x,s,z)\right]d\tau. \tag{14}$$

$$F(t,x,\varepsilon)=-X(t,x,0,\varepsilon)u(t,x)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X(t,x,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,\tau)\left[u(t,x)-u(s,x)\right]ds. \tag{15}$$

В дальнейшем используем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть выполняются условия а), *б*), *в*) и г). Матричные функции $H(t,x,s,\varepsilon)$, и $N_1(t,x,s,z,\varepsilon)$ определены соответственно с помощью формул (13) и (14). Тогда справедливы оценки

$$\left\|H\left(t,x,s,\varepsilon\right)\right\|=C_3,\ \ (t,x,s)\in G_1,\ \ \varepsilon>0, \tag{16}$$

$$\left\|N_1\left(t,x,s,z,\varepsilon\right)\right\|=C_4,\ \ (t,x,s,z)\in G_2,\ \ \varepsilon>0, \tag{17}$$

где $C_3=C\sqrt{n}\left(e^{-1}+N_0\right),C_4=C_1\sqrt{n}\left(e^{-1}+N_0\right),N_0>0.$

Доказательство. В силу условий а) – *б*) из (13) имеем

$$\left\|H\left(t,x,s,\varepsilon\right)\right\|\le\frac{1}{\varepsilon}\left\|H\left(t,x,s,\varepsilon\right)\right\|C\int_s^t\lambda_0\left(\tau\right)d\tau+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t\left\|X\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)\right\|N_0\lambda_0\left(\tau\right)C\left(\int_\tau^t\lambda_0\left(s\right)ds\right)d\tau\,.$$

В этом случае в силу (11) для первого слагаемого имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\|X\left(t,x,s\right)\right\|C\int_s^t\lambda_0\left(\tau\right)d\tau=\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}+e^{\int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau}C\int_s^t\lambda_0\left(\tau\right)d\tau=\left|\mu=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_0\left(\tau\right)d\tau\right|=C\sqrt{n}\mu e^{-\mu}\le C\sqrt{n}e^{-1}.$$

Для второго слагаемого справедливо соотношение

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t\left\|X\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)\right\|N_0\lambda_0\left(\tau\right)C\left(\int_\tau^t\lambda_0\left(s\right)ds\right)d\tau=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t\sqrt{n}e^{\int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau}N_0\times$$

$$\times\lambda_0C\left(\int_\tau^t\lambda_0\left(s\right)ds\right)=\left|\begin{matrix}\mu=\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_s^t\lambda_0\left(\tau\right)d\tau\\ d\mu=-\dfrac{1}{\varepsilon}\lambda_0\left(\tau\right)d\tau\end{matrix}\right|=CN_0\sqrt{n}\left(-1\right)\frac{1}{\varepsilon}\int_{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau}^{t}\mu e^{-\mu}d\mu\le$$

$$\le CN_0\sqrt{n}\int_0^\infty\mu e^{-\mu}d\mu\le CN_0\sqrt{n}.$$

Следовательно, лемма 1 доказана.

Аналогично этому можно получить оценки (17).

Лемма 2. Пусть функция $F(t,x,\varepsilon)$ определена формулой (15). Если $u(t,x)\in C_n(G)$; $u(0,x)=0$ при $x\in[0,X]$ и $\lambda_0\left(t\right)>0$ при почти всех $t\in[0,T]$, $\varphi\left(t\right)=\int_0^t\lambda_0\left(s\right)ds$, $t\in[0,T]$, $\left\|K\left(t,x,t\right)\right\|=N_0\lambda_3\left(t\right)$, то справедлива оценка

$$\left\|F(t,x,\varepsilon)\right\|\le\left(2N_0+1\right)\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}\left\|u(t,x)\right\|_C+\left(N_0+1\right)\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\sqrt{n}, \tag{18}$$

где $\beta\in(0,1)$, $\omega_u\left(\delta\right)\le SUP\left|u\left(\varphi^{-1}(\upsilon),x\right)-u\left(\varphi^{-1}\left(\upsilon_0\right),x\right)\right|$.

$\varphi^{-1}\left(\vartheta\right)$ – обратная функция к $\varphi\left(t\right)=\int_0^t\lambda_0\left(s\right)ds$, т.е. $\varphi^{-1}\left(\varphi\left(t\right)\right)=t,\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\vartheta\right)\right)$.

Доказательство. 1) Пусть $0\le t\le\varphi^{-1}\left(\varepsilon^\beta\right),0<\beta<1$. Тогда из (18) имеем

$$\left\|F\left(t,x,\varepsilon\right)\right\|\le\left\|-X\left(t,x,0\right)u\left(t,x\right)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^tX\left(t,x,s\right)K\left(s,x,s\right)[u\left(t,x\right)-u\left(s,x\right)]ds\right\|\le$$

$$\le\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)}+\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\int_0^t\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}N_0e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi(t)-\varphi(s)\right]d\tau}\lambda_0\left(s\right)ds\le$$

$$\le\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\sqrt{n}\left(1-N_0\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)}+\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\sqrt{n}\le\left(1+N_0\right)\sqrt{n}\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right). \tag{19}$$

2) Если $\varphi^{-1}(\varepsilon^{\beta}) \le t \le T$, то

$$\left\|X(t,x,s,\varepsilon)u(t,x)\right\| \le \left\|u(t,x)\right\|_C \sqrt{n}e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}, \tag{20}$$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})} X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)\left[u(t,x)-u(s,x)\right]ds + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{t} X(t,x,s,\varepsilon)\times \right.$$

$$\left. \times\left[u(t,x)-u(s,x)\right]ds \right\| \le 2N_0\sqrt{n}\left\|u(t,x)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + N_0\sqrt{n}\omega_u\left(\varepsilon^{\beta}\right). \tag{21}$$

Учитывая (19), (20) и (21), из (15) получаем оценку (18).
Лемма 2 доказана.
В силу оценок (16), (17) и (18) из (12) получим

$$\left\|\varphi(t,x,\varepsilon)\right\| \le a(t,x,\varepsilon) + \int\limits_0^t C_3\left|\varphi(s,x,\varepsilon)\right|ds, \quad (t,x)\in G \tag{22}$$

$$\text{где } a(t,x,\varepsilon) \le C_0(\varepsilon) + \int\limits_0^t\int\limits_0^x C_4\left\|\varphi(s,z,\varepsilon)\right\|dzds, \tag{23}$$

$$C_0(\varepsilon) \le (2N_0+1)e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}\sqrt{n}\left\|u(t,x)\right\|_C + (N_0+1)\omega_u\left(\varepsilon^{\beta}\right)\sqrt{n}.$$

На основе леммы 1 неравенство (22) перепишем в следующем виде:

$$\left\|\varphi(t,x,\varepsilon)\right\| \le a(t,x,\varepsilon) + \int\limits_0^t C_3 e^{C_3(t-s)}a(s,x,\varepsilon)ds.$$

Вместо $a(t,x,\varepsilon)$ положим выражение (23) и из последнего неравенства имеем

$$\left\|\varphi(t,x,\varepsilon)\right\| \le C_0(\varepsilon) + C_4\int\limits_0^t\int\limits_0^x\left\|\varphi(s,z,\varepsilon)\right\|dzds +$$

$$+C_3\int\limits_0^t e^{C_3(t-s)}\left\{C_0(\varepsilon) + C_4\int\limits_0^t\int\limits_0^x\left\|\varphi(s_1,z_1,\varepsilon)\right\|dz_1ds_1\right\}ds.$$

Это неравенство интегрируем и применим формулу Дирихле:

$$\left\|\varphi(t,x,\varepsilon)\right\| \le C_0(\varepsilon)e^{C_3t} + C_4\int\limits_0^t\int\limits_0^x e^{C_3(t-s)}\left\|\varphi(s,z,\varepsilon)\right\|dzds,$$

Затем, заменяя t на T, получаем в виде

$$\left\|\varphi(t,x,\varepsilon)\right\| \le C_0(\varepsilon)e^{C_3T} + C_4\int\limits_0^t\int\limits_0^x e^{C_3T}\left\|\varphi(s,z,\varepsilon)\right\|dzds. \tag{24}$$

На последнюю (24) применим лемму 2, имеем

$$\left\|\varphi(t,x,\varepsilon)\right\| = C_0(\varepsilon)e^{C_3T}\left(1+\int\limits_0^t\int\limits_0^x C_0(\varepsilon)e^{C_3T}R(t,x,s,z)dzds\right),$$

где $R(t,x,s,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(C_4e^{C_3T}\right)^{n+1}\dfrac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}$.

Из последнего уравнением имеем

$$\left\|\varphi(t,x,\varepsilon)\right\|=C_0(\varepsilon)C_4,\ (t,x,)\in G, \tag{25}$$

где $C_0(\varepsilon)=(2N_0+1)e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}\sqrt{n}\left\|u(t,x)\right\|_C+(N_0+1)2\omega_u(\varepsilon^{\beta})\sqrt{n}$,

$$C_4=e^{C_3T}\left[1+R(T,X,0,0)TX\right].$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия а), *б*), *в*) и система (1) имеет непрерывное решение $u(t,x)\in C_n(G)$, $u(t,0)=0$ при $x\in[0,X]$ и $\lambda_0(t)>0$ при почти всех $t\in[0,T]$. Тогда решение $u(t,x,\varepsilon)$ системы (3) при $\varepsilon\to 0$ сходится к непрерывному решению $u(t,x)$ системы (1) в области G и справедлива оценка (25).

Теорема 2. Пусть выполняются условия а), б), в), г) и $\lambda_0(t)>0$ при почти всех $t\in[0,T]$. Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $C_n(G)$.

Доказательство. Пусть однородная система

$$\int_0^t K(t,x,s)u(s,x)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z)dzds=0,(t,x)G$$

то есть система (1) при $f(t,x)\equiv 0$ допускает ненулевое решение $\vartheta(t,x)$ при $(t,x)\in G$. Последнюю систему перепишем в следующем виде:

$$\int_0^t K(t,x,s)\vartheta(0,x)ds+\int_0^t K(t,x,s)\left[\vartheta(s,x)-\vartheta(0,x)\right]ds+\int_0^t[K(t,x,s)-$$

$$\left.-K(s,x,s)\right]\vartheta(s,x)ds+\int_0^t\int_0^x\left.[N(t,x,s,z)-N(s,x,s,z)\right]\vartheta(s,z)dzds=0.\ 26 \tag{26}$$

Обе части системы (26) скалярно умножаем на вектор $\vartheta(0,x)$. Скалярное произведение обозначим символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Умножая справа и слева, затем суммируя их, имеем

$$\int_0^t K(s,x,s)\left[\vartheta(s,x)-\vartheta(0,x)\right]ds+\vartheta(0,x),\int_0^t[K(t,x,s)-K(s,x,s)ds+$$

$$+\vartheta(s,z),\int_0^t\int_0^x[N(t,x,s,z)-N(s,x,s,z)]\vartheta(s,z)dzds=0. \tag{27}$$

Отсюда, в силу условий теоремы, имеем

$$\int_0^t\lambda_0(s)ds\left\|\vartheta(0,x)\right\|\le 2N_0\int_0^t\lambda_0(s)ds\sup_{(s,x)\in G_1}\left\|\vartheta(s,x)-\vartheta(0,x)\right\|ds+$$

$$+2C\int_0^t\int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau\cdot\left\|\vartheta(dzds)\right\|d\tau ds+2C_1\int_0^t\int_0^x\int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau\cdot\left\|\vartheta(s,z)\right\|dzds. \tag{28}$$

Далее, применяем формулу Дирихле и теорему о среднем и, деля обе части на $\int_0^t\lambda_0(s)ds$ и переходя к пределу при $t\to 0$, получим

$$\vartheta(0,x)=0 \text{ при } x\in[0,X]. \tag{29}$$

Из (1) при $f(t,x)=0$, $(t,x)\in G$, имеем $u(t,x,\varepsilon)=0$ при всех $(t,x)\in G$, $\varepsilon>0$. Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$\left\|u(t,x)\right\|_C=\left\|u(t,x,\varepsilon)-u(t,x)\right\|_C\le[(2N_0+1)e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+(N_0+1)\omega_{\overline{u}}(e^{\beta})\sqrt{n}e^{C_2T}\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$. Таким образом $\left\|u(t,x)\right\|_C=0$. Отсюда $u(t,x)=0$ при всех $(t,x)\in G$.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Варлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1979. С. 543.

2. Асанов А., Иманалиев М.И., Асанов Р.А. Один класс систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на полуоси // Символ науки. 2016. № 1. С. 16–20.

3. Искандаров С., Бокобаева З.Б. Об оценках решений и их первых производных линейного вольтеррова неявного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Вестник института математики НАН КР. 2018. № 1. С. 49–55.

4. Сергеев В.О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 3. С. 531–534.

5. Зулпукаров Ж.А., Алиева Ж.А. Построение регуляризации решения для уравнения Вольтерра первого рода // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2023. № 5. С. 52–60.

6. Сапарова Г.Б., Омурзаков Б.К. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода в задачах экономики // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2022. № 8. С. 67–70.

7. Чоюбеков С. Примеры решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода // Вестник ОшГУ. 2022. № 1. С. 167–176.