СТАТЬИ

УДК 517.968

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Аширбаева А.Ж., Жолдошова Ч.Б.

Ошский технологический университет имени М. Адышева, Ош,
e-mail: chebire86@mail.ru, aijarkyn.osh@mail.ru

Приведение дифференциальных уравнений в частных производных более высокого порядка к интегральным уравнениям является сложной задачей. Одним из методов, используемых при приведении дифференциальных уравнений в частных производных к интегральным уравнениям, является метод дополнительного аргумента. Особенность этого метода заключается в том, что, не приводя дифференциальное уравнение в частных к каноническому виду, сводят его к интегральному уравнению. Метод дополнительных аргументов широко используется для дифференциальных уравнений первого порядка. Целью исследования является приведение дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка к системе интегральных уравнений новым методом, не приводя уравнения к каноническому виду. В статье рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, где коэффициенты производных неизвестной функции не зависят от времени. Рассматриваемое дифференциальное уравнение относится к уравнениям гиперболического типа, и это уравнение рассматривается с начальными условиями. Дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка записывается в операторной форме с помощью нескольких обозначений. Затем поставленная задача с использованием метода дополнительного аргумента сводится к системе интегральных уравнений. А существование и единственность решения системы интегральных уравнений определяются применением принципа сжимающих отображений. Результаты получены с использованием метода дополнительного аргумента и принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: частные производные, дифференциальное, интегральное, уравнение, метод дополнительного аргумента, четвертый порядок, начальная задача

RESEARCH OF SOLUTIONS TO A FOURTH ORDER PARTIAL DERIVATIVE DIFFERENTIAL EQUATION USING THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT

Ashirbaeva A.Zh., Zholdoshova Ch.B.

Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh,
e-mail: chebire86@mail.ru, aijarkyn.osh@mail.ru

The reduction of higher-order partial differential equations to integral equations is a complex task. One of the methods used to transform partial differential equations into integral equations is the method of the additional argument. The key feature of this method is that it reduces the partial differential equation to an integral equation without bringing it into its canonical form. The method of additional arguments is widely used for first-order differential equations. The aim of the research is to transform a fourth-order partial differential equation into a system of integral equations using a new method, without reducing the equation to its canonical form. This article discusses a partial differential equation of the fourth order, where the coefficients of the derivatives of the unknown function do not depend on time. The equation under consideration belongs to the class of hyperbolic-type equations, and it is examined with initial conditions. The partial differential equation of the fourth order is written in operator form using several notations. Then, the problem is reduced to a system of integral equations using the method of the additional argument. The existence and uniqueness of the solution to the system of integral equations are determined by applying the contraction mapping principle. The results were obtained using the method of an additional argument and the principle of compressed mappings.

Keywords: partial derivatives, differential equation, integral equation, equation, method of the additional argument, fourth order, initial value problem

Введение

Приведение дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных более высокого порядка к интегральным уравнениям (ИУ) является сложной задачей. В настоящее время для приведения таких уравнений в ИУ или системы ИУ используется метод дополнительного аргумента (МДА). Чтобы использовать указанный метод, авторы должны преобразовать начальную задачу в удобную для них дифференциальную форму. Такие применения использовались для уравнений второго порядка в работах [1, 2].

Цель исследования – приведение заданного ДУ в частных производных четвертого порядка к системе ИУ новым методом, не приводя уравнения к каноническому виду, и исследование решения системы ИУ.

Материалы и методы исследования

Приведение ДУ в частных производных второго порядка в систему ИУ, не приводя заданного уравнения к каноническому виду, рассмотрено в работах [1, 2]. Сведение осуществлено с помощью МДА.

МДА значительно облегчит численное решение нелинейных начальных задач [3]. МДА применяется при решении систем уравнений в частных производных [4, 5].

В работе используются решения следующих ИУ:

$$p(s,t,x) = x + \int_s^t a(p(\nu,t,x))d\nu, \tag{1}$$

$$q(s,t,x) = x - \int_s^t a(q(\nu,t,x))d\nu,$$

$$(s,t,x) \in Q_2(T), \tag{2}$$

$$Q_n(T) = \{(t_1,t_2,t_3,..,t_n,x) \big| \; 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_n \le T, x \in R\},$$

где $p(s,t,x)$, $q(s,t,x)$ – неизвестные функции, $a(x)$ – заданная достаточно гладкая функция. ИУ видов (1), (2) с заданной гладкой функцией имеют единственные решения.

В данной работе использованы классы функций $\overline{C}(\Omega)$, $\overline{C}^{(k)}(\Omega)$, $Lip(N\big|_u, M\big|_v, ...)$, введенные в [6, 7].

Рассматривается задача Коши вида

$$u_{tttt}(t,x) - 2a^2(x)u_{ttxx}(t,x) + a^4(x)u_{xxxx}(t,x) = e(x)u_{xxx}(t,x) + f(x)u_{xx}(t,x) + F(t,x,u), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^k u(0,x)}{\partial t^k} = u_k(x), \quad k = 0,1,2,3, \tag{4}$$

где

$$e(x) = -4a^3a'(x), \quad f(x) = -2a^2\left[\left(a'(x)\right)^2 + aa''(x)\right].$$

Для приведения данной задачи Коши (3), (4) к системе ИУ используются следующие обозначения:

$$\vartheta_1(t,x) = u_t(t,x) - a(x)u_x(t,x), \tag{5}$$

$$\omega(t,x) = u_{tt}(t,x) - a^2(x)u_{xx}(t,x), \tag{6}$$

$$\vartheta_2(t,x) = \omega_t(t,x) - a(x)\omega_x(t,x). \tag{7}$$

$$\alpha_1(x) = -a'(x), \tag{8}$$

$$\alpha_2(x) = -a(x)a''(x). \tag{9}$$

С помощью обозначений (5)–(9) запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\omega_{tt}(t,x) - a^2(x)\omega_{xx}(t,x) = F(t,x,u). \tag{10}$$

Теорема. Пусть $a(x), u_k(x) \in \overline{C}^{(4)}(R), k = 0,1,2,3, \quad F(t,x,u) \in \overline{C}^{(4)}(Q_1(T) \times R) \cap Lip(L\big|_u)$.

Тогда задача (3), (4) сводится к решению систем ИУ относительно неизвестных $\vartheta_1(t,x), \vartheta_2(t,x)$:

$$\vartheta_1(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\alpha_1(x)\left(u_0\left(p(0,t,x)\right) + \int_0^t \vartheta_1\left(s, p(s,t,x)\right)ds\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_1(q(s,t,x))\vartheta_1(s,q(s,t,x))ds + \int_0^t\left(\psi_0\left(p(0,s,q)\right) + \int_0^s \vartheta_2\left(\nu, p(\nu,s,q)\right)d\nu\right)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_2(q(s,t,x))\left(u_0\left(p(0,s,q)\right) + \int_0^s \vartheta_1\left(\nu, p(\nu,s,q)\right)d\nu\right)ds \tag{11}$$

$$\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\psi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_1(x)\left(\psi_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t\vartheta_2\left(s,p(s,t,x)\right)ds\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_1(q)\vartheta_2(s,q(s,t,x))ds-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_2(q)\left(\psi_0\left(p(0,s,q)\right)+\int_0^s\vartheta_2\left(\nu,p(\nu,s,q)\right)d\nu\right)ds+$$

$$+\int_0^t F(s,q;\left(u_0\left(p(0,s,q)\right)+\int_0^s\vartheta_1\left(\nu,p(\nu,s,q)\right)d\nu\right))ds, \qquad (12)$$

где $\left[2\vartheta_1(t,x)-\alpha_1(x)u(t,x)\right]\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \omega(0,x)=\psi_0(x)$

$$\left[2\vartheta(t,x)-\alpha_1(x)\omega(t,x)\right]\big|_{t=0}=\psi_1(x),$$

$$u(t,x)=u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t\vartheta_1\left(s,p(s,t,x)\right)ds.$$

Доказательство

Доказательство теоремы проводится в три этапа. Авторы также используют результаты работ [1, 2, 6].

I. Из (5), (6) и из начальных условий (4) получается следующая система ИУ:

$$\vartheta_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_1(x)u(t,x)-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_1(q(s,t,x))\vartheta_1(s,q(s,t,x))ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_2(q(s,t,x))u(s,q(s,t,x))ds+\int_0^t\omega(s,q(s,t,x))ds, \qquad (13)$$

$$u(t,x)=u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t\vartheta_1\left(s,p(s,t,x)\right)ds\,, \qquad (14)$$

В самом деле, если $\vartheta_1(t,x)$, $u(t,x)$ – решение системы ИУ (13), (14), то, дифференцируя (13), имеем

$$\vartheta_{1t}(t,x)+a(x)\vartheta_{1x}(t,x)=a(x)\alpha_1(x)u_x(t,x)+\omega(t,x). \qquad (15)$$

Из (15), учитывая введенные выше обозначения, получаем (6), (5).

Таким образом, авторы из (13), (14) получили (5), (6).

Теперь, наоборот, рассматривается получение системы ИУ (13), (14) из (5), (6).

Для использования МДА запишем (5) в следующем виде:

$$z_{1t}(t,x;u)+a(x)z_{1x}(t,x;u)=-\alpha_1(x)\vartheta_1(t,x)-\alpha_2(x)u+2\omega(t,x), \qquad (16)$$

где $z_1(t,x;u)=2\vartheta_1(t,x)-\alpha_1(x)u(t,x)$.

Для задач (16), (4) и (6), (4) применяем МДА и получаем систему ИУ (13), (14). Такие применения МДА приведены в работах [1, 2, 6].

II. Из (6), (7) и из начальных условий (4) получаем систему ИУ:

$$\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\psi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_1(x)\omega(t,x)-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_1(q)\vartheta_2(s,q)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_2(q)\omega(s,q)ds+\int_0^t F(s,q,u)ds, \qquad (17)$$

$$\omega(t,x)=\omega_0\left(p(0,t,x)\right)+\int\limits_0^t \vartheta_2\left(s,p(s,t,x)\right)ds\,. \qquad (18)$$

Пусть $\vartheta(t,x),\quad \omega(t,x)$ являются решениями системы ИУ (17), (18). Тогда, дифференцируя (17), получаем (7).

$$\vartheta_{2t}(t,x)+a(x)\vartheta_{2x}(t,x)=a(x)\alpha_1(x)\omega_x(t,x)+F(t,x;u). \qquad (19)$$

Из (19) получаем справедливость уравнения (6).

Следовательно, авторы из (17), (18) получили (6), (7).

Теперь, наоборот, авторы должны показать, что из (6), (7) следует справедливость системы ИУ (13), (14).

Далее, записывая (6) в следующем виде, используем стандартное применение МДА:

$$D[a(t,x)]z_2(t,x;u)=-\alpha_1(x)\vartheta_2(t,x)-\alpha_2(x)\omega(t,x)+2F(t,x;u), \qquad (20)$$

где $z_2(t,x;u)=2\vartheta_2(t,x)-\alpha_1(x)\omega(t,x)$.

Следует отметить, что новизной данной работы является способ записи (7) в виде (20).

Следовательно, после применения МДА для задач (20), (4) и (7), (4) получаем (17), (18).

В уравнение (13), (17), подставляя (14) и (18), получаем (11), (12).

III. Система ИУ (11), (12) имеет единственное решение в $\bar{C}^{(4)}(G_2(T^*))$, $T^*>0$ определяется из данных задачи (3), (4).

Используем векторную запись системы (11), (12):

$$\theta = A\theta, \qquad (21)$$

где $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ – вектор-функция переменных (t,x), $\theta_1=\vartheta_1(t,x)$, $\theta_2=\vartheta_2(t,x)$, а компоненты оператора $A=(A_1,A_2)$:

$$A_1\theta=\varphi_1(t,x)+\frac{1}{2}\alpha_1(x)\int\limits_0^t\theta_1\left(s,p(s,t,x)\right)ds+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_1(q(s,t,x))\theta_1(s,q(s,t,x))ds+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^s\theta_2\left(\nu,p(\nu,s,q)\right)d\nu ds-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_2(q(s,t,x))\int\limits_0^s\theta_1\left(\nu,p(\nu,s,q)\right)d\nu ds,$$

$$A_2\theta=\varphi_2(t,x)+\frac{1}{2}\alpha_1(x)\int\limits_0^t\theta_2\left(s,p(s,t,x)\right)ds-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_1(q)\theta_2(s,q(s,t,x))ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_2(q)\int\limits_0^s\theta_2\left(\nu,p(\nu,s,q)\right)d\nu ds+\int\limits_0^t F(s,q,\left(u_0\left(p(0,s,q)\right)+\int\limits_0^s\theta_1\left(\nu,p(\nu,s,q)\right)d\nu\right))ds,$$

где

$$\varphi_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_1(x)u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int\limits_0^t\psi_0\left(p(0,s,q)\right)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_2(q(s,t,x))u_0\left(p(0,s,q)\right)ds,$$

$$\varphi_2(t,x)=\frac{1}{2}\psi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_1(x)\omega_0\left(p(0,t,x)\right)-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_2(s,q)\psi_0\left(p(0,s,q)\right)ds.$$

Применяем принцип сжатых отображений, полагая $\left\|\theta-\theta_0\right\|\le M$ и используя норму

$$\left\|\theta\right\|=\max_{0\le i\le 2}\max_{(t,x)\in Q_1(T)}\left\{\left|\theta_i\right|,\quad i=1,2\right\}.$$

При $T < T^*$ в $S(\theta_0, M)$ справедливы оценки:

$$\left|A_1\theta - \varphi_1\right| \le \Omega_1(T), \qquad \left|A_2\theta - \varphi_2\right| \le \Omega_2(T),$$

где

$$\Omega_1(T) = PKT + \left(1 + \frac{P}{2}\right) K \frac{T^2}{2},$$

$$\Omega_2(T) = PKT + PK\frac{T^2}{4} + \left\|F\right\| T,$$

$$\left\|\theta\right\| \le \left\|\theta_0\right\| + M = K,$$

$$\left|\alpha_i(x)\right| \le P = const, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через T_1, T_2 – соответственно корни уравнений:

$$\Omega_1(T) = M, \qquad \Omega_2(T) = M.$$

Оператор A будет оператором сжатия в $S(\theta_0, M)$. В самом деле если $\theta^1, \theta^2 \in S(\theta_0, M)$ имеют компоненты $\theta_i^1, \theta_i^2 \quad i = 1, 2.$, то имеем

$$\left|A_1\theta^1 - A_1\theta^2\right| \le \Omega_3(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

$$\left|A_2\theta^1 - A_2\theta^2\right| \le \Omega_4(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

где

$$\Omega_3(T) = PT + \left(1 + \frac{P}{2}\right)\frac{T^2}{2},$$

$$\Omega_4(T) = PT + P\frac{T^2}{4} + L\frac{T^2}{2},$$

Пусть T_3, T_4 – корни уравнений

$$\Omega_3(T) = 1, \Omega_4(T) = 1.$$

Тогда при $T < T^* = \min\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ оператор A является оператором сжатия, следовательно, (20) имеет единственное решение.

Определив единственное решение уравнения (21), можно подставить его в (14) и получить единственное решение поставленной задачи (3), (4).

Заключение

Рассмотрено дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, нелинейное относительно неизвестной функции с начальными условиями. Поставленная задача сведена к решению систем ИУ. Результаты получены с использованием метода дополнительного аргумента и принципа сжатых отражений.

Список литературы

1. Аширбаева А.Ж. Новый способ решения общего уравнения гиперболического типа // Математическое образование. 2018. № 3 (87). С. 12–16.

2. Мамазиаева Э.А., Абдазова У.М. Исследование решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа // Вестник Ошского государственного университета. 2022. № 1. С. 119–125. DOI: 10.52754/16947452_2022_1_119.

3. Панков П.С., Будникова О.Д. Численное решение задачи о движении волн Римана на основе метода дополнительного аргумента // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. 2003. № 32. С. 35–38.

4. Садыкова Г.К. Построение решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2021. № 7. С. 10–13.

5. Садыкова Г.К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Известия вузов Кыргызстана. 2019. № 11. С. 15–19.

6. Мамазиаева Э.А., Абдазова У.М. Применение метода дополнительного аргумента к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, нелинейных относительно неизвестной функции // Вестник Ошского государственного университета. 2022. № 1. С. 112–118. DOI: 10.52754/16947452_2022_1_112.

7. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. № 3 (69). С. 6–10. DOI: 10.23670/IRJ.2018.69.031.